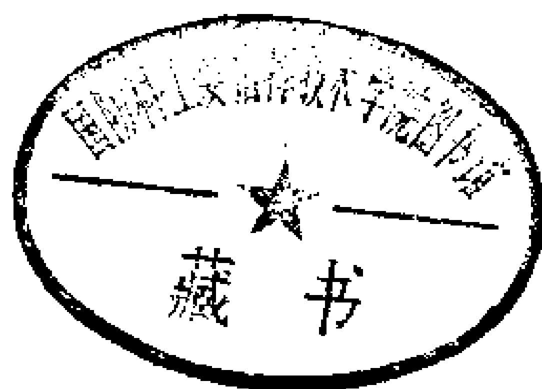
高等学校教材

复变函数

（第二版）

余家荣 编





高等教育出版社

(京)112号

本书第二版是在第一版的基础上，经过作者多年教学实践，听取了同行们的宝贵意见，并根据理科数学力学教材编审委员会函数论与泛函分析编审组在1987—1989年期间议定的《复变函数(侧重理论)教材编写提纲》修订而成的.

第二版保持了原有特色，补充了一些重要定理的证明，改写了辐角函数，许多章节都有不同程度的改进. 此外，第二版增添了同调形式及同伦形式的Cauchy定理、整函数的无穷乘积展开及亚纯函数的部分分式展开、单值性定理等，尤其增添多复变函数一章，可以扩大学生的知识面.

全书内容包括：复数及复平面、复变函数、复变函数的积分、级数、留数、保形映射、解析开拓、调和函数以及多复变函数共九章，此外还有两个附录. 对于不属于复变函数课程的一般内容加上了 * 号，供学有余力的学生选学.

本书可供综合大学数学、力学、天文学等专业及师范院校数学专业作为教材，也可供自学者参考.

责任编辑　丁鹤龄

高等学校教材

复变函数

(第二版)

余家荣　编

*

高等教育出版社出版

新华书店总店北京科技发行所发行

高等教育出版社激光照排技术部

天津新华印刷一厂印刷

*

开本850×1168　1/32　印张 10.5　字数 270 000

1979年2月第1版1992年4月第2版　　1992年6月第1次印刷

印数：0 001—6 417

ISBN 7-04-003754-8/O·1110

定价：4.00元

第二版序

本书第一版问世至今已经十多年了. 感谢我国数学同行们的支持,在教学中广泛使用了它,并且对它提出了一些宝贵的意见和建议. 高等教育出版社早就要求编者编写修订版,直到现在才完成了这一任务.

近年以来,高等学校理科数学教材编审委员会和高等教育出版社重视教材的更新工作. 关于复变函数的教材更新,曾于1987 — 1989年间分别在武汉、郑州及合肥召开讨论会,会议决定编写一本侧重理论、一本侧重应用的复变函数教材,并且分别拟定了编写提纲. 本书第二版是一本侧重理论的复变函数教材.

自从1980年以来,为了吸取外国经验进行教学改革,在武汉大学建立了中法数学班,其专业课由中法两国教师按照法国大学数学专业的教学计划及教学大纲进行教学. 我们了解到,由于复变函数论这一学科比较成熟,近年在法国以及其他各国的有关教学中,除引用了一些新的表述方式及少量新成果(如同调及同伦形式的柯西定理)外,其基本内容大体上没有变化. 至于课程的具体细节,教师则可根据情况安排.

本书第二版对第一版中有关内容参照同行们的意见作了修订,还参照编写提纲增添了一些内容. 增添的内容有的是为了提供教师选讲,有的是为了使本书同时成为供读者进一步学习的参考书. 现对增添的内容说明如下.

当前国际数学界已经比较普遍采用了集合有关概念与逻辑记号,我国有些数学同行在教学中也采用了. 集合有关概念及记号对教与学都比较方便,本书部分地采用了它们,并且把有关的基本知识写成了附录一,以备参阅.

为了使本书能起到参考书的作用,它包含了所有有关结果的

证明；附录二中讲述了约当定理，这属于拓扑学的范围；第六章中讲述了正规族及黎曼定理与边界对应定理的证明.

同调及同伦形式的柯西定理是单复变函数论中一项较近代的发展，多复变函数论是一门正在逐步形成的学科，本书对它们都作了介绍．关于多复变函数，这里只讲述了两个复变数情形的一些基本结果.

本书还增添了无穷乘积、整函数的无穷乘积展式以及亚纯函数的部分分式展式等比较经典的内容．此外，还补充了一些习题，其中包含由一些小题组成的大题；在法国数学课的习题及考试题中往往采用这种类型的大题.

对于不属于我国复变函数课程一般教学内容的章节以及有关习题，本书中加上了 * 号作为标志.

本书第一版中包含《解析函数对平面场的应用》一章．由于这一章有些内容在当前只有历史上的意义，而且现在即将有侧重应用的复变函数教材出版，本修订版中把这一章完全删去了.

与本书第一版一样，本修订版的编写得到了武汉大学及其他兄弟院校同行们的热情帮助．孙道椿副教授审阅了本书各章及附录一；张敦穆副教授审阅了第六章和附录二；陈方权副教授审阅了全书．他们都提出了许多重要的意见．史济怀教授倡议在本书中加入多复变函数一章，并对该章内容提了具体建议．编者谨向这些同志们热烈致谢！

对于本书中所存在的问题，请读者予以指正．编者谨在此预致谢意！

余家荣

1991 年 10 月 5 日于武汉

第一版序(摘录)

本书是以武汉大学数学系1963—1965年复变函数讲义为基础改写的．这次改写的依据是1977年理科数学教学大纲讨论会上所制定的复变函数教材编写大纲．

本书讲述单复变函数的分析理论以及几何理论的基本内容．其中有些内容在教学中可以根据具体情况决定取舍，例如可不讲多角形映射公式的证明、普阿松公式及狄里克莱问题等．对多值函数可限于讨论只有一个有限枝点的情况．如果这样，第二章第5—7段的内容可以删去一些；对于对数函数和幂函数可只采用限制辐角使其成为单值函数的方法来处理；第五章第4段的例3也可删去．如果教学时间还不够，可考虑再删去亚纯函数零点与极点的个数、儒歇定理以及保形映射一般原理的证明等．关于解析函数的应用，采用本书时可根据实际情况选讲．本书每章后附有较多习题，以备选作．

在本书编写过程中，得到了武汉大学及其他许多兄弟院校同志们的热情帮助．在审稿定稿时，又受到了四川大学领导和同志们的亲切关怀．审稿小组的同志们提出了许多宝贵的意见以及改进教材的具体办法；何成奇、范莉莉同志还帮助改写了有关多值函数的几段，严镇军同志帮助添加了一些习题．编者谨向所有这些同志表示衷心的感谢！

余家荣

1978年8月28日于武汉

引 言

复数是十六世纪人们在解代数方程时引入的.在十七和十八世纪,随着微积分的发明与发展,人们研究了复变数函数(简称复变函数),特别是把实变数初等函数推广到复变数情形,得到了一些重要结果.

因为复数最初是单纯地从形式上推广而引进的,并且在十八世纪以前,由于人们对于复数的有关概念了解得不够清楚,用它们进行计算得到了一些矛盾,所以复数在历史上长期不能为人们所接受.“虚数”这一名词本身就恰好反映了这一点.

可是复数不是什么神秘的东西,它是由一对实数表示出来的,有许多几何量与物理量,也可用一对实数来表示,例如平面上点的直角坐标、平面向量、平面上的速度与力等等;而复数恰好可以用来表示这些量.在一些情况下,应用复数表示这些量计算起来比较方便.在十八世纪,J.达朗贝尔(1717 — 1783)与L.欧拉(1707 — 1783)等人逐步阐明了复数的几何意义和物理意义,澄清了复数的概念,并且应用复数和复变函数研究了流体力学等方面的一些问题.直到这时,人们才接受了复数,复变函数论才能顺利地建立和发展.

复变函数的理论基础是在十九世纪奠定的.A.L.柯西(1789 — 1857)、K.外尔斯特拉斯(1815 — 1897)和G.F.B.黎曼(1826 — 1866)是这一时期的三位代表人物.柯西和外尔斯特拉斯分别应用积分和级数研究复变函数,黎曼研究复变函数的映射性质.

复变函数论的建立和发展与解决实际问题的需要有联系.例如复变函数论的主要基础之一——柯西定理,是柯西在研究水波传播问题时,设法计算一些积分而发现的;流体力学、电学和空气动

力学的研究都促进了这门学科的发展.

到本世纪,复变函数论是数学的重要分支之一,随着它的领域不断扩大而发展成一门庞大的学科. 这门学科中所研究的问题,有些是由其本身在发展中提出的,有些是由实际问题或其他学科提出的. 对于自然科学其他部门(如空气动力学、流体力学、电学、热学、理论物理等)以及数学中其他分支(如微分方程、积分方程、概率论、数论等),复变函数论都有重要的应用[1].

从本世纪三十年代开始,我国数学工作者在单复变函数和多复变函数方面,做过许多重要的工作. 在七十年代,杨乐、张广厚同志在单复变函数的值的分布理论和渐近值理论中,得到了首创性的重要成果; 从八十年代起,我国数学工作者在数学的各个领域中开展了富有成果的研究工作. 这些都受到国际数学界的重视. 事实证明,中国人民具有无穷无尽的潜力,一定能在不远的将来,使我国在数学上全面达到世界先进水平.

本书主要讲述单复变函数的基本理论,对于多复变函数只在最后一章作了简单的介绍. 书中内容主要包括单复变函数的导数、积分、级数以及映射性质等,而且主要只限于讨论一类特殊的复变函数,即所谓解析函数.

---

[1] 例如可参看: M.A.拉甫伦捷夫及Б.А.沙巴特著、施祥林、夏定中译《复变函数论方法》, 高等教育出版社, 1956.

目 录

[1] 黎曼定理及边界对应定理的证明不属于复变函数课程的一般教学内容.

第一章　复数及复平面

§1. 复数及其几何表示

1. 复数域　复变函数论的出发点是复数. 在代数中已经讲述过复数. 为了便于以后讨论, 我们把有关复数的基本定义及结论, 在这里回顾一下.

每个复数 z 具有 $x+iy$ 的形状, 其中 x 和 $y\in\mathbb{R}$ (全体实数所成的集), i 是虚数单位(也可记作 $\sqrt{-1}$); x 及 y 分别称为 z 的实部和虚部, 分别记作 $x=\mathrm{Re}z$ 及 $y=\mathrm{Im}z$. 如果两个复数 z_1 和 z_2 的实部及虚部分别相等, 那么这两个复数称为相等, 记作 $z_1=z_2$. 如果 $\mathrm{Im}z=0$, 那么把 z 看作实数, 记作 $z=\mathrm{Re}z$; 如果 $\mathrm{Im}z\neq0$, 那么 z 称为虚数; 如果 $\mathrm{Im}z\neq0$, 而 $\mathrm{Re}z=0$, 那么 z 称为纯虚数, 记作 $z=i\mathrm{Im}z$. 全体复数所成的集记作 $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ 是 $\mathbb{C}$ 的一个子集.

对实数引进加、减、乘、除运算, 并且运算满足一些法则(交换律、结合律、分配律等). 这样就是在集 $\mathbb{R}$ 上引进一个代数结构, 使其成为实数域 $\mathbb{R}$. 对复数也可以引进加、减、乘、除运算. 设 $a_1, a_2, b_1, b_2\in\mathbb{R}$. 复数的加法和乘法运算由下列等式定义:

$$(a_1+ib_1)+(a_2+ib_2)=(a_1+a_2)+i(b_1+b_2),$$

$$(a_1+ib_1)(a_2+ib_2)=(a_1a_2-b_1b_2)+i(a_1b_2+a_2b_1),$$

在上列第二式中, 把乘积展开成"变数" i 的多项式, 然后用 -1 代替 i^2, 就得到右边的结果. 减法和除法则定义为加法和乘法的逆运算. 我们有

$$(a_1+ib_1)-(a_2+ib_2)=(a_1-a_2)+i(b_1-b_2),$$

$$\frac{a_1+ib_1}{a_2+ib_2}=\frac{(a_1+ib_1)(a_2-ib_2)}{(a_2+ib_2)(a_2-ib_2)}$$

$$=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}+i\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}\quad(a_2+ib_2\neq 0).$$

可以证明，复数的加减乘除与实数的相应运算满足同样的一些法则. 对复数引进这些运算，就是在集 $\mathbb{C}$ 上引进一个代数结构，使其成为复数域$\mathbb{C}$; 它可看作是由实数域 $\mathbb{R}$ 扩张而得的.

2. 复平面 在平面上取直角坐标，平面上的任一点可由一对实数唯一确定. 这时在平面上或对集 $\mathbb{R}^2=\{(x,y)|x$ 及 $y\in\mathbb{R}\}$引进两点($\mathbb{R}^2$ 中一个元素称为一点)的距离，即引进一种拓扑结构①; 这时平面或集 $\mathbb{R}^2$ 称为平面 $\mathbb{R}^2$, 它是一个欧氏空间.

一个复数由它的实部和虚部、亦即由一对实数所唯一确定. 作映射 $\mathbb{C}\to\mathbb{R}^2: z=x+iy\mapsto(x,y)\in\mathbb{R}^2$. 于是在集 $\mathbb{C}$ 与平面 $\mathbb{R}^2$ 之间建立了一个双射（即一一对应的映射）. 把$(x,y)\in\mathbb{R}^2$ 看作表示 $x+iy$, 并把它称为点 $x+iy$. 这时平面 $\mathbb{R}^2$ 就称为平面 $\mathbb{C}$, 它是对集 $\mathbb{C}$ 引进两点的距离即一种拓扑结构而得到的一个欧氏空间. 集 $\mathbb{R}$ 与横坐标轴上一切点所组成的集相对应，集 $i\mathbb{R}=\{iy|y\in\mathbb{R}\}$ 与纵坐标轴上一切点所组成的集相对应. 因此把横坐标轴及纵坐标轴分别称为实轴及虚轴. 实轴在原点右方及左方的部分分别称为正实轴及负实轴; 虚轴在原点上方及下方的部分分别称为上半虚轴及下半虚轴. 实轴上方及下方的半平面分别称为上半平面及下半平面; 虚轴右方及左方的半平面分别称为右半平面及左半平面. 复平面 $\mathbb{C}$ 有时按照表示复数的字母用 $z, w, \cdots$ 而称为 z 平

① 从距离可引进邻域等概念.

面，w 平面，等等.

复数除了可以用复平面 $\mathbb{C}$ 上的点表示外，还可以用 $\mathbb{C}$ 上的向量来表示. 把复平面 $\mathbb{C}$ 上一切向量所组成的集记作 V. V 中向量可以分成一些等价类：一向量经过平行移动(把平行移动记作“关系 P”)而得的所有向量，与原向量构成一个等价类. 集 V 对于关系 P 的所有等价类构成一个新的集，称为集 V 对于关系 P 的商集，记作 V/P[1]. 复数 $z=x+iy$(x 及 $y\in\mathbb{R}$) 可以用在实轴及虚轴上的投影分别是 x 及 y 的任一向量来表示，亦即可用一个等价类中的任一向量来表示. 有时我们把“复数”与“向量”用作同义语.

在图 1 中，把向量 $z=x+iy$ 的起点放在原点. 向量 $z=x+iy$ 的长度称为复数 z 的模，记作 $|z|$. 显然 $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$. 实轴的正向与向量 z 之间的夹角(这里假定 $z\neq 0$)称为 z 的辐角，记作 θ，显然 θ 有无穷多个不同的值，把它们记作

$$\operatorname{Arg}z=\theta+2k\pi \qquad (k\in\mathbb{Z}),$$

或简单记作

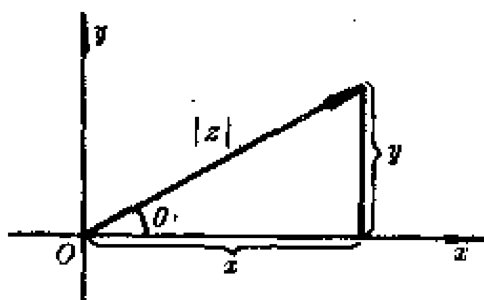


图 1

$$\operatorname{Arg}z=\theta+2\pi\mathbb{Z},$$

其中 $\mathbb{Z}=\{0,\pm 1,\pm 2,\cdots\}$. $\operatorname{Arg}z$ 中只有一个值 α 满足条件 $-\pi<\alpha\leqslant\pi$; 它叫做 z 的辐角的主值，记作 $\arg z$. 以后也把 $\operatorname{Arg}z$ 中任一确定的值记作 $\arg z$.

复数 $z(\neq 0)$ 的实部和虚部可以用模和辐角表示为：

$$\operatorname{Re}z=|z|\cos\operatorname{Arg}z,\ \operatorname{Im}z=|z|\sin\operatorname{Arg}z.$$

[1] 每一等价类是 V/P 的一个元素.

于是 z 本身可以表示为

$$z=|z|(\cos \operatorname{Arg} z+i \sin \operatorname{Arg} z),$$

这个式子称为 z 的三角表示式.

两复数 $x+iy$ 与 $x-iy$ 称为(相互)共轭的. 如果其中之一用 z 表示, 那么另一个用 $\bar{z}$ 表示. 显然点 z 和 $\bar{z}$ 关于实轴为对称. 因此

$$|z|=|\bar{z}|;$$

此外, $\operatorname{Arg} z=-\operatorname{Arg} \bar{z}$. 这个式子理解为: 把 $\operatorname{Arg} z$ 的每个值乘以 -1, 就得到 $\operatorname{Arg} \bar{z}$ 的一个值; 反过来也是这样.

现对复数的加法作出几何解释. 根据定义, 复数 $z_1=a_1+ib_1$ 及 $z_2=a_2+ib_2$ 相加与向量 z_1 及 z_2 相加的规律一致. 在力学和物理学中, 如力、速度、加速度等都可用向量来表示, 这就说明了复数可以用来表示实有的物理量. 当向量 $z_1(\neq 0)$ 及 $z_2(\neq 0)$ 的方向不是相同或相反时(图 2), 作起点在原点的向量 z_1 及 z_2, 取 z_1 及 z_2 为两边作平行四边形, 从原点出发沿对角线所作的向量就表示 z_1+z_2. 当 z_1 及 z_2 的方向相同或相反时, z_1+z_2 也不难作出.

由于 $-z_2$ 表示与 z_2 长度相等、方向相反的向量, 而且 $z_1-z_2=z_1+(-z_2)$, 可以仿照 z_1+z_2 的情形作出 z_1-z_2(图 2). 显然, 复数相减与向量相减的法则也一致.

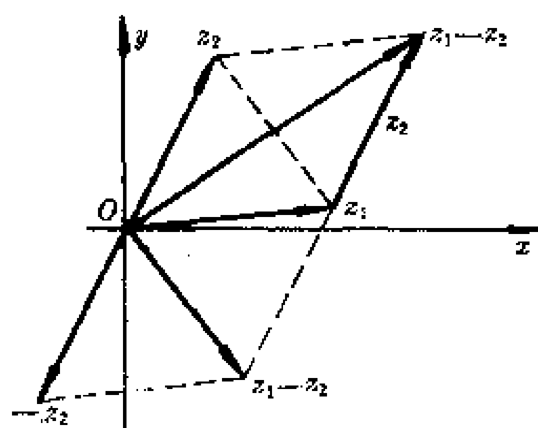


图 2

现在导出关于两复数的和及差的模的几个不等式. 如图 2, 从点 z_1 出发到点 z_1+z_2 的向量是向量 z_2. 于是向量 z_1, z_2 及 z_1+z_2 构成一个三角形的三边. 因为三角形一边的长不能超过另两边长的和, 并且不能小于它们的差, 所以我们有

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2| \tag{2.1}$$

以及

$$|z_1+z_2|\geqslant||z_1|-|z_2||. \tag{2.2}$$

不难证明, 即使向量 z_1, z_2 及 z_1+z_2 平行于同一直线, 从而不能构成一个三角形的三边时, (2.1)及(2.2)仍然成立.

在(2.1)及(2.2)中用 $-z_2$代替 z_2, 我们就得到

$$|z_1-z_2|\leqslant|z_1|+|z_2| \tag{2.3}$$

以及

$$|z_1-z_2|\geqslant||z_1|-|z_2||. \tag{2.4}$$

我们也可直接证明(2.3)及(2.4). 事实上, 在图 2 中, 从点 z_2 出发到点 z_1 的向量是 z_1-z_2. 考虑向量 z_1, z_2 及z_1-z_2 所构成的三角形, 就可推出这两个不等式.

把 z_1 及 z_2 看作复平面 $\mathbb{C}$ 上的两点, 不难看出, $|z_1-z_2|$表示 z_1 及 z_2 两点之间的距离.

关于复数的模, 有下列结果: 设复数 $z=x+iy$, 其中 x 及 y 是实数. 显然

$$|\mathrm{Re}z|\leqslant|z| \text{ 及 } |\mathrm{Im}z|\leqslant|z|. \tag{2.5}$$

又因 $z\bar{z}=x^2+y^2=|z|^2$, 所以

$$|z|=\sqrt{z\bar{z}}\ . \tag{2.6}$$

例 1 试用复数表示圆的方程

$$a(x^2+y^2)+bx+cy+d=0,$$

其中 a, b, c, d 是实常数(如果 $a=0$, b 及 c 不全为 0, 这是直线方程).

令 $z=x+iy$, 代入方程中: 由于

$$x^2+y^2=z\bar{z},$$

$$x=\frac{z+\bar{z}}{2},\ y=\frac{z-\bar{z}}{2i},$$

我们就得到

$$az\bar{z}+\bar{\beta}z+\beta\bar{z}+d=0,$$

其中 $\beta=\frac{1}{2}(b+ic)$.

例 2 设 z_1 及 z_2 是两个复数. 读者可自行证明:

$$\overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2,\ \overline{z_1z_2}=\bar{z}_1\bar{z}_2,$$

$$\bar{\bar{z}}_1=z_1.$$

现在把不等于零的复数 z_1 及 z_2 写成三角表示式:

$$z_1=|z_1|(\cos\operatorname{Arg}z_1+i\sin\operatorname{Arg}z_1),$$

$$z_2=|z_2|(\cos\operatorname{Arg}z_2+i\sin\operatorname{Arg}z_2),$$

由乘法的定义得

$$z_1z_2=|z_1||z_2|[\cos(\operatorname{Arg}z_1+\operatorname{Arg}z_2)+i\sin(\operatorname{Arg}z_1+\operatorname{Arg}z_2)],$$

由此得

$$|z_1z_2|=|z_1||z_2|,\ \operatorname{Arg}(z_1z_2)=\operatorname{Arg}z_1+\operatorname{Arg}z_2. \tag{2.7}$$

(2.7)中后一等式应理解如下: 对于 $\operatorname{Arg}(z_1z_2)$ 的任一值, 一定有 $\operatorname{Arg}z_1$ 及 $\operatorname{Arg}z_2$ 的各一值, 使其和与前者相等; 反过来也是这样. 其次, 由除法的定义得

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{|z_1|}{|z_2|}[\cos(\operatorname{Arg}z_1-\operatorname{Arg}z_2)+i\sin(\operatorname{Arg}z_1-\operatorname{Arg}z_2)],$$

由此得

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|},\ \operatorname{Arg}\frac{z_1}{z_2}=\operatorname{Arg}z_1-\operatorname{Arg}z_2, \tag{2.8}$$

(2.8)中后一等式应与(2.7)中后一等式类似地理解.

由(2.7)及(2.8), 可以推出两个不为零的复数的积与商的几

何意义，这里不一一列举.

例 3 设 z_1 及 z_2 是两个复数. 求证

$$|z_1+z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2+2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}),$$

并利用这一等式证明(2.1).

我们有

$$\begin{aligned}|z_1+z_2|^2&=(z_1+z_2)\overline{(z_1+z_2)}\\&=(z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2})\\&=z_1\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}+z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2\\&=|z_1|^2+|z_2|^2+z_1\overline{z_2}+\overline{z_1\overline{z_2}}\\&=|z_1|^2+|z_2|^2+2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}).\end{aligned}$$

其次，由上列等式以及

$$\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})\leqslant|z_1\overline{z_2}|=|z_1||z_2|$$

就可导出(2.1).

例 4 作出过复平面$\mathbb{C}$上不同两点 a,b 的直线及过不共线三点 a,b,c 的圆的表示式.

由(2.8)，可见 $\arg\dfrac{a}{b}$ 表示向量 a 及 b 的一个夹角. 上述 a, b 两点所决定直线上任一点 z 的特征是：向量 $z-a$ 及 $b-a$ 的一个夹角是 0 或 $\pm\pi$, 即

$$\arg\frac{z-a}{b-a}=0\text{ 或 }\pm\pi.$$

从而所求直线的表示式是

$$\mathrm{Im}\frac{z-a}{b-a}=0.$$

上述 a,b,c 三点所决定的圆上任一点的特征是：向量 $z-a$ 及 $z-b$ 的夹角，等于向量 $c-a$ 及 $c-b$ 的夹角，或者与它互补，即

$$\arg\frac{z-a}{z-b}-\arg\frac{c-a}{c-b}$$

$$=\arg\left(\frac{z-a}{z-b}\Big/\frac{c-a}{c-b}\right)=0 \text{ 或 } \pm\pi.$$

从而所求圆的表示式是

$$\operatorname{Im}\left(\frac{z-a}{z-b}\Big/\frac{c-a}{c-b}\right)=0.$$

最后考虑复数的乘幂. 先考虑 $z\neq0$ 的情形. 设 n 是正整数, z^n 表示 n 个 z 的乘积, 由(2.7)递推得

$$z^n=|z|^n[\cos(n\operatorname{Arg}z)+i\sin(n\operatorname{Arg}z)].$$

显然, 这公式当 $n=0(z^0=1)$时也成立. 定义 $z^{-n}=\dfrac{1}{z^n}$, 我们有

$$z^{-n}=|z|^{-n}[\cos(-n\operatorname{Arg}z)+i\sin(-n\operatorname{Arg}z)].$$

因此对于任意整数 m, 下列公式成立:

$$z^m=|z|^m(\cos m\operatorname{Arg}z+i\sin m\operatorname{Arg}z). \tag{2.9}$$

在(2.9)中取 $|z|=1$ 及 $\operatorname{Arg}z$ 的一值 θ, 我们就得到著名的棣莫弗公式:

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^m=\cos m\theta+i\sin m\theta. \tag{2.9$'$}$$

如果 $n(\geqslant2)$是正整数, 定义 $z^{\frac{1}{n}}$ 是满足 $w^n=z$ 的复数 w, 那么由(2.9)可导出

$$z^{\frac{1}{n}}=+\sqrt[n]{|z|}\left[\cos\left(\frac{1}{n}\operatorname{Arg}z\right)+i\sin\left(\frac{1}{n}\operatorname{Arg}z\right)\right]. \tag{2.10}$$

由上式右边可得$z^{\frac{1}{n}}$ 的 n 个不同的值, 其中 $+\sqrt[n]{|z|}$ 表示 $|z|^{\frac{1}{n}}$ 的正值. 为了得到全部不同的值, 只要固定 $\operatorname{Arg}z$ 的某一个值, 设此值为 φ, 然后在(2.10)的右边用下列 n 个值代入 $\operatorname{Arg}z$: $\varphi, \varphi+2\pi, \cdots, \varphi+(n-1)2\pi$.

如上可把 z^n 的定义扩充到 n 是有理数情形. 当 $z=0$, 而 n 是正有理数时, $z^n=0$.

例 5 求 $\sqrt[4]{1+i}$ 的所有值.

由于 $1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$, 我们有

$$\sqrt[4]{1+i}=\sqrt[8]{2}\left[\cos\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)+i\sin\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\right]$$

$$=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\pi}{16}+i\sin\frac{\pi}{16}\right)\left(\cos\frac{k\pi}{2}+i\sin\frac{k\pi}{2}\right)$$

$$(k=0,1,2,3).$$

因此

$$\sqrt[4]{1+i}=w_0, iw_0, -w_0, -iw_0,$$

其中

$$w_0=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\pi}{16}+i\sin\frac{\pi}{16}\right).$$

3. 复球面及无穷大 在第1段中, 已经引进了复平面. 现在要作出复数在球面上的几何表示.

在点坐标是(x,y,u)的三维空间中, 把xOy平面看作就是$z=x+iy$平面. 考虑球面S:

$$x^2+y^2+u^2=1.$$

取定球面上一点$N(0,0,1)$, 称为球极. 作连接N与xOy平面上任一点$A(x,y,0)$的直线, 并且设这直线与球面的交点是$A'(x',y',u')$. 那么A'称为A在球面上的球极射影. 由于$(x,y,0)$, (x',y',u')及$(0,0,1)$共线, 我们有$x:y:-1=x':y':u'-1$, 从而

$$z=x+iy=\frac{x'+iy'}{1-u'}.$$

又因

$$|z|^2=z\bar{z}=\frac{(x')^2+(y')^2}{(1-u')^2}=\frac{1-(u')^2}{(1-u')^2}=\frac{1+u'}{1-u'},$$

于是有

$$x' = \frac{z+\bar{z}}{|z|^2+1}, \quad y' = \frac{z-\bar{z}}{i(|z|^2+1)}, \quad u' = \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}.$$

这样，在复平面 $\mathbb{C}$ 与 $S-\{N\}$之间建立了一个双射. 如果一点 z 的模愈大，那么它的球极射影就愈接近于球极 N. 由于在球上只有一个球极 N，我们约定复平面上有一个理想的点，称为无穷远点，其球极射影为 N；无穷远点及 N 分别可看作一个新引进的非正常复数无穷大(即 ∞)在平面及球面上的几何表示. 集 $\mathbb{C}\bigcup\{\infty\}$称为扩充复数集 $\mathbb{C}_\infty$，复平面 $\mathbb{C}\bigcup\{\infty\}$ 称为扩充复平面 $\mathbb{C}_\infty$. 于是在球面 S、扩充复平面 $\mathbb{C}_\infty$ 及扩充复数集 $\mathbb{C}_\infty$ 之间分别建立了双射. 这种球面 S 称为复球面 S(图 3). 引进复球面即相应地对 $\mathbb{C}_\infty$ 引进了一种拓扑结构.

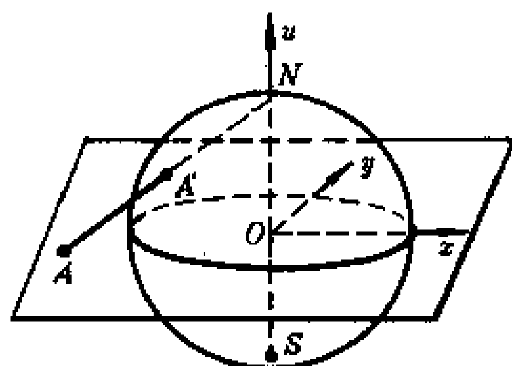


图 3

球极射影最初是在天文学中引进的，后来又应用在地理学中. 应用球极射影，可以把天球或地球表示在平面上.

无穷大及无穷远点用作同义语，正常的复数及复平面上的点往往称为有限复数及有限点. 在本书中，除特别声明外，只考虑有限复数及复平面.

对于复数 ∞，实部和虚部以及辐角的概念都没有意义；至于它的模，则约定为 $+\infty$ ($|\infty|=+\infty$). 而对于任何正常的(有限的)复数 z，$|z|<+\infty$.

为了以后需要，我们引进下列运算的意义：设 α 为有限复数，那么

$$\alpha\pm\infty=\infty\pm\alpha=\infty,$$

$$\alpha\cdot\infty=\infty\cdot\alpha=\infty(\alpha\neq 0),$$

$$\frac{\alpha}{0}=\infty(\alpha\neq 0),\quad \frac{\alpha}{\infty}=0(\alpha\neq\infty).$$

运算$\infty\pm\infty$, $0\cdot\infty$, $\frac{0}{0}$ 以及 $\frac{\infty}{\infty}$ 没有意义.

§2. 复平面的拓扑

4. 初步概念 关于平面$\mathbb{R}^2$或复平面$\mathbb{C}$的基本拓扑知识，在数学分析中已经讲述过了. 在这里把已学过的一些知识回顾一下.

设$\alpha\in\mathbb{C}$, $r\in(0,+\infty)$. 集

$$\{z\,|\,|z-\alpha|<r,\ z\in\mathbb{C}\}^{①}\tag{4.1}$$

称为以α为中心、r为半径的圆盘，或者称为α的一个邻域或r邻域，记作$U(\alpha,r)$. 集

$$\{z\,|\,|z-\alpha|\leqslant r\}$$

称为以α为中心、r为半径的闭圆盘，记作$\overline{U}(\alpha,r)$.

设已给集$E\subset\mathbb{C}$. 我们可以把某些$\alpha\in\mathbb{C}$加以分类. 如果$\forall r>0$, $U(\alpha,r)\cap E$中有无穷个点，那么α称为集E的一个聚点或极限点；这时它可能属于集E，也可能不属于集E. 如果$\exists r>0$，使得$U(\alpha,r)\subset E$，那么α称为集E的内点；它显然属于集E，并且是集E的聚点. 如果$\forall r>0$, $U(\alpha,r)\cap E\neq\emptyset$, $U(\alpha,r)\cap E^c\neq\emptyset$②，那么$\alpha$称为集$E$的边界点. 集$E$的全部边界点所组成的集，称为集$E$的边界，记作$\partial E$. ∂E中的点不一定属于集E，也不一定是集E的聚点. $E\cup\partial E$称为E的闭包，记作$\overline{E}$. 如果$\exists r>0$，使得$U(\alpha,r)\cap E=\{\alpha\}$，那么$\alpha$是集$E$的一个边界点，但不是聚点，它称为集$E$的孤立点.

如果集E中的点全部是内点，那么集E称为开集. 如果

---

① 以后往往不明确写出$z\in\mathbb{C}$这一条件.

② E^c表示E的余集，即$\mathbb{C}-E$，亦即$\mathbb{C}$中不属于E的点构成的集.

集 E 或者没有聚点，或者所有聚点都属于集 E，那么集 E 称为闭集，任何集 E 的闭包 $\overline{E}$ 必然是一闭集．如果 $\exists r>0$，使得 $U(0,r)\supset E$，那么集 E 称为有界集；否则集 E 就称为无界集．复平面 $\mathbb{C}$ 上的有界闭集称为紧集[1]．

例 1 上述圆盘 $U(\alpha,r)$ 中的点全部是它的内点．因此圆盘是一开集，并且是一个有界开集．闭圆盘 $\overline{U}(\alpha,r)$ 的所有聚点都属于它，因此它是一闭集，并且是一个有界闭集．

例 2 设 α 及 r 与前述意义相同．集 $\{z||z-\alpha|=r\}$ 是以 α 为中心、以 r 为半径的圆；它是圆盘 $U(\alpha,r)$ 及闭圆盘 $\overline{U}(\alpha,r)$ 的边界．

例 3 复平面 $\mathbb{C}$ 及实轴、虚轴都是无界集．复平面 $\mathbb{C}$ 是无界开集．

例 4 设 α 及 r 与前述意义相同．集 $E=\{z|0<|z-\alpha|<r\}$ 是去掉圆心的圆盘．圆心 $\alpha\in\partial E$，它是 ∂E 的孤立点，同时也是集 E 的聚点．

$\forall r>0$，在扩充复平面 $\mathbb{C}_\infty$ 上，集 $\{z||z|>r, z\in\mathbb{C}_\infty\}$ 称为无穷远点的一个邻域．有了这一概念，就可引进无穷远点是扩充复平面 $\mathbb{C}_\infty$ 上某一集 E 的聚点、内点、边界点与孤立点的定义，以及这平面上开集与闭集的定义．在 $\mathbb{C}_\infty$ 上，闭集就是紧集[2]．

$\mathbb{C}$，$\varnothing$ 及 $\mathbb{C}$ 中所有圆盘可形成 $\mathbb{C}$ 中的拓扑 τ，τ 中任意个元素的并集及有限个元素的交集都属于 τ．实际上，τ 就是 $\mathbb{C}$ 中所有开集的集合（$\mathbb{C}$ 及 $\varnothing$ 都看作开集）．这样就构成了一个拓扑空间 $(\mathbb{C},\tau)$，简称为拓扑空间 $\mathbb{C}$，也可简称空间 $\mathbb{C}$ 或复平面 $\mathbb{C}$，并且有上述各种有关概念．如上所述，在 $\mathbb{C}\bigcup\{\infty\}$ 上也可构成拓扑空间 $\mathbb{C}_\infty$，简称为空间 $\mathbb{C}_\infty$ 或扩充复平面 $\mathbb{C}_\infty$．一般拓扑空间是通常拓扑空

①② 一般拓扑空间中的紧集是具有"有限覆盖"性质的集．这就是说，紧集是这样的集：从覆盖它的任何一组开集（即它包含在这组开集的并集中）中，可以找出有限个开集覆盖它．采用直线 $\mathbb{R}$ 上覆盖定理的证法，可以证明，复平面 $\mathbb{C}$ 上具有这一性质的集就是有界闭集；复平面 $\mathbb{C}_\infty$ 上具有这一性质的集就是闭集，从而 $\mathbb{C}_\infty$ 上的紧集就是闭集．

间 $\mathbb{C}$ 及拓扑空间 $\mathbb{R}$ 的推广.

5. 区域·曲线 复平面 $\mathbb{C}$ 上具有下列性质的点集 D 称为区域：

(1) D 是开集;

(2) D 中任意两个有限点可以用有限个相衔接的线段所构成的折线连结起来，而使这折线上的点完全属于 D.

如果区域 D 是有界集，那么它就称为有界区域；否则称为无界区域.

性质 (2) 称为连通性. 简单地说，区域就是连通的开集. 区域 D 内及其边界上全部点所组成的集称为闭区域，记作 $\overline{D}$. 按照 D 为有界或无界区域，$\overline{D}$ 称为有界闭区域或无界闭区域. 容易看出，圆盘 (4.1) 及这圆盘内除去有限个点而得的集都是有界区域；闭圆盘是一有界闭区域；复平面是一无界区域.

扩充复平面 $\mathbb{C}_\infty$ 上不含无穷远点的区域的定义与上述定义相同；含无穷远点的区域是 $\mathbb{C}$ 上一个区域与无穷远点的一个邻域的并集.

一般区域的边界可能十分复杂. 在上面所举的例子中，圆盘的边界是圆. 为了研究比较一般的区域，先讲述曲线的概念.

设已给

$$z=z(t) \qquad (a\leqslant t\leqslant b), \tag{5.1}$$

在这里 $\operatorname{Re} z(t)$ 及 $\operatorname{Im} z(t)$ 都在闭区间 $[a, b]$ 上连续. 集 $\{z(t) | t\in [a, b]\}$ 称为一条连续曲线，记作 (5.1). 如果对 $[a, b]$ 上任意不同两点 t_1 及 t_2，但 $\{t_1, t_2\}\neq\{a, b\}$，我们有 $z(t_1)\neq z(t_2)$，那么 (5.1) 称为一条简单连续曲线，或约当曲线. 如果还有 $z(a)=z(b)$，(5.1) 称为一条简单连续闭曲线，或约当闭曲线.

显然，圆是一条简单连续闭曲线，它把平面分成两个没有公有点的区域，其中一个有界，一个无界，并且这两区域都以已给圆作为边界. 任一条约当闭曲线也把整个平面分成两个没有公有点的区域：一个有界的称为它的内区域，一个无界的称为它的外区域，这两个区域都以已给的约当闭曲线作为边界.

上述结果就是约当定理，它看来很直观，可是严格的证明比较复杂，证明见附录二.

在本书中涉及的往往是比较特殊的简单连续曲线．设在(5.1)中，$\mathrm{Re}\,z(t)$及$\mathrm{Im}\,z(t)$在$[a,b]$上不但连续，并且有连续的导数，而且在$[a,b]$上，$z'(t)\neq 0$. 那么曲线(5.1)称为一条光滑曲线[①]．这时(5.1)的切线随着t连续变动．有限条光滑曲线相衔接构成一条分段光滑曲线，也记作(5.1)．这时虽然$\mathrm{Re}\,z(t)$及$\mathrm{Im}\,z(t)$在$[a,b]$上连续，可是它们在这闭区间上只是分段有连续的导数．我们今后一般把光滑曲线或分段光滑曲线简称曲线．必要时也特别指出某一曲线是光滑曲线或分段光滑曲线.

用简单闭曲线围成的区域，是比较简单的区域．现在进一步把区域加以分类．设D是一区域．在复平面$\mathbb{C}$上，如果D内任何简单闭曲线的内区域中每一点属于D，那么D称为单连通区域，不是单连通的区域，称为多连通区域．例如在复平面$\mathbb{C}$上，任何简单闭曲线的内区域是单连通区域；而同心圆之间的点所组成的集(称为圆环)是多连通区域．又如从单连通区域中挖去p个彼此没有公有点的闭区域，也得到一个多连通区域；如果在所挖去的闭区域中，有些用点或非闭简单曲线来代替，那么所得区域仍然是多连通区域(图 4)．特别，从圆盘内挖去p个点，就得到一个多连通区域.

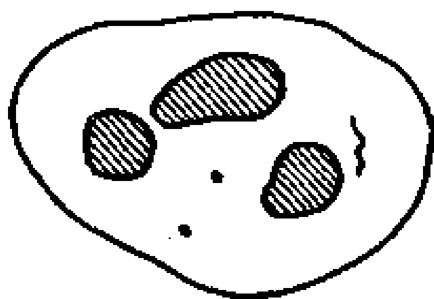


图 4

在扩充复平面$\mathbb{C}_\infty$上，单连通区域的定义要作一点修改，那就是：如果区域D内任何简单闭曲线的内区域或外区域(包括无穷远点)中每一点都属于D，那么D称为单连通区域；否则D称为多连通区域．例如考虑$\mathbb{C}_\infty$上的一条约当闭曲线C. 如果区域D由C外所有点、包括无穷远点组成，那么D

---

① 这里设 $z(t)=x(t)+iy(t)$，则 $z'(t)=x'(t)+iy'(t)$；$z'(a)$及$z'(b)$分别是右及左导数．对于闭光滑曲线，除了 $z(a)=z(b)$外，还必须有 $z'(a)=z'(b)$.

是单连通区域. 如果 D 只由 C 外所有有限点组成，那么它就是一个多连通区域.

例 1 集$\{z|(1-i)z+(1+i)\bar{z}>0\}$为一半平面，它是一个单连通无界区域，其边界为直线

$$(1-i)z+(1+i)\bar{z}=0, \text{即 } x+y=0 .$$

例 2 集$\{z|2<\mathrm{Re}z<3\}$为一垂直带形，它是一个单连通无界区域，其边界为直线 $\mathrm{Re}z=2$ 及 $\mathrm{Re}z=3$.

例 3 集$\{z|2<\arg(z-i)<3\}$为一角形，它是一个单连通无界区域，其边界为半射线

$$\arg(z-i)=2 \quad \text{及} \quad \arg(z-i)=3 .$$

例 4 集$\{z|2<|z-i|<3\}$为一圆环，它是一个多连通有界区域，其边界为圆 $|z-i|=2$ 及 $|z-i|=3$. .

例 5 在$\mathbb{C}_\infty$ 上，集$\{z|2<|z|\leqslant+\infty\}$及集$\{z|2<|z|<+\infty\}$分别是单连通及多连通的无界区域，其边界分别是$\{z||z|=2\}$及$\{z||z|=2\}\bigcup\{\infty\}$.

习 题 一

1. 计算

(1) $(1+i)\pm(1-2i)$(并作图);

(2) $\dfrac{i}{(i-1)(i-2)(i-3)}$;

(3) $\sqrt{2}\ (\cos\alpha+i\sin\alpha)(\cos\beta+i\sin\beta)$,

其中

$$0<\alpha,\beta<\frac{\pi}{2}\ ,\ \alpha=\mathrm{arctg}2,\ \beta=\mathrm{arctg}\,3 .$$

2. 证明:

(1) $z_1+(z_2+z_3)=(z_1+z_2)+z_3$ (并作图);

(2) $z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3$.

3. 证明:

(1) 当且仅当 $z=\bar{z}$ 时，复数 z 为实数;

(2) 设 z_1 及 z_2 是两复数．如果 z_1+z_2 和 z_1z_2 都是实数，那么 z_1 和 z_2 或者都是实数，或者是一对共轭复数．

4. 求复数 $\dfrac{z-1}{z+1}$ 的实部及虚部．

5. 设 z_1 及 z_2 是两复数．求证：

(1) $|z_1-z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2-2\mathrm{Re}\,(z_1\overline{z_2})$;

(2) $|z_1-z_2|\geqslant||z_1|-|z_2||$;

(3) $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$，并说明其几何意义．

[提示] (1) 利用公式 $|z|^2=z\overline{z}$; (2) 利用(1); (3)利用(1)及§1 例 3.

6. 设 $z=x+iy$．证明

$$\frac{|x|+|y|}{\sqrt{2}}\leqslant|z|\leqslant|x|+|y|.$$

7. 试证：分别以 z_1,z_2,z_3 及 w_1,w_2,w_3 为顶点的两个三角形相似的必要与充分条件是

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ z_1 & z_2 & z_3\\ w_1 & w_2 & w_3\end{vmatrix}=0.$$

[提示] 所给条件即 $\dfrac{z_2-z_1}{z_3-z_1}=\dfrac{w_2-w_1}{w_3-w_1}$．

8. 如果 $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$，且 $z_1+z_2+z_3=0$，证明 z_1,z_2,z_3 是内接于单位圆的一个正三角形的顶点．

9. 求证：

$$(1+\cos\theta+i\sin\theta)^n=2^n\cos^n\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{n\theta}{2}+i\sin\frac{n\theta}{2}\right).$$

10. 解方程 $z^2-3iz-(3-i)=0$．

11. 求 $\dfrac{1}{2}(\sqrt{2}+i\sqrt{2})$的三次方根．

12. 设 $|z_0|<1$．证明：

如果 $|z|=1$，那么

$$\left|\frac{z-z_0}{1-\overline{z}_0z}\right|=1.$$

如果 $|z|<1$，那么

(1) $\left|\dfrac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z}\right|<1$;

(2) $1-\left|\dfrac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z}\right|^2=\dfrac{(1-|z_0|^2)(1-|z|^2)}{|1-\overline{z_0}z|^2}$;

(3) $\dfrac{||z|-|z_0||}{1-|z_0||z|}\leqslant\left|\dfrac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z}\right|\leqslant\dfrac{|z|+|z_0|}{1+|z_0||z|}$;

(4) $\left|\dfrac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z}\right|\leqslant|z|+|z_0|$.

[提示] 利用第5题(1).

13. 设有限复数 z_1 及 z_2 在复球面上表示为 P_1 及 P_2 两点，求证 P_1 及 P_2 的距离是:

$$\frac{2|z_1-z_2|}{\sqrt{(1+|z_1|^2)(1+|z_2|^2)}}.$$

14. 满足下列条件的点 z 所组成的点集是什么? 如果是区域，是单连通区域还是多连通区域?

(1) $\mathrm{Im}z=3$;

(2) $\mathrm{Re}z>\dfrac{1}{2}$;

(3) $|z-i|\leqslant|2+i|$;

(4) $|z-2|+|z+2|=5$;

(5) $\arg(z-i)=\dfrac{\pi}{4}$;

(6) $|z|<1$, $\mathrm{Re}z\leqslant\dfrac{1}{2}$;

(7) $0<|z+1+i|<2$;

(8) $\left|\dfrac{z-1}{z+1}\right|\leqslant 2$;

(9) $0<\arg(z-1)<\dfrac{\pi}{4}$, $2<\mathrm{Re}z<3$;

(10) $0<\arg\dfrac{z-i}{z+i}<\dfrac{\pi}{4}$.

第二章 复变函数

§1. 解析函数

1. 极限与连续性 设在复平面 $\mathbb{C}$ 上已给点集 E. 如果有一法则 f, 使得 $\forall z=x+iy\in E$, $\exists w=u+iv\in\mathbb{C}$ 和它相对应, 我们就把 f 称为在 E 上确定的复变数函数、或简称复变函数, 或更加明确地称为单复变函数, 在这里 x, y, u 及 $v\in\mathbb{R}$. 我们说 w 是 z 关于函数 f 的值, 记作 $w=f(z)$. 函数 f 也可记作 $f(z)$, $w=f(z)$, 或记作 $z\mapsto f(z)$. 为了表明 f 是在 E 上确定、在 $\mathbb{C}$ 中取值的函数, 可简记为 $f: E\to\mathbb{C}$, 或 $E\xrightarrow{f}\mathbb{C}$. 在作进一步说明以前, 我们所理解的复变函数都是单值的, 也就是说, 对于复变数 z 的每个值, 相应的值 w 是唯一确定的.

函数 f 也称为从 E 到 $\mathbb{C}$ 的一个映射或映照. 把集 E 表示在一个复平面上, 称为 z 平面; 把相应的函数值 $w=f(z)$ 表示在另一复平面上, 称为 w 平面. 令 $A=\{f(z)\,|z\in E\}$, 记作 $A=f(E)$, 那么我们说映射 $w=f(z)$ 把 $\forall z_0\in E$ 映射成为 $w_0=f(z_0)\in A$, 把集 E 映射成为集 A. 于是 f 是从 E 到 A 的一个映射. 在这种映射下, w_0 及 A 分别称为 z_0 及 E 的象, 而 z_0 及 E 分别称为 w_0 及 A 的原象. 如果 $w=f(z)$ 把不同的点映射成不同的点, 那么我们说它是一个从 E 到 A 的双射.

有时也把 z_0 和 E 以及它们的象作在同一复平面上.

下面举出复变函数所确定的映射的三个简单例子. 在第六章中, 我们将进一步研究复变函数所确定的映射.

例 1 考虑映射 $w=z+\alpha$.

令 $z=x+iy$, $w=u+iv$, $\alpha=a+ib$, 其中 x, y, u, v, a 及 b 是

实数. 我们有

$$u=x+a, v=y+b.$$

显然，$w=z+\alpha$ 是从 z 平面到 w 平面的一个双射. 如果把 z 以及它的象作在同一复平面上，这一映射是 z 平面内的一个平移.

例 2 考虑映射 $w=\alpha z$, 其中 $\alpha\neq 0$.

令 $\alpha=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，其中 r 是 α 的模，θ 是它的辐角，显然 $w=\alpha z$ 可以看作是下列两个函数或映射的复合函数或复合映射:

$$\omega=(\cos\theta+i\sin\theta)z,$$

$$w=r\omega$$

把 z,ω 及 w 都作在同一复平面上. 由于 ω 与 z 的模相同，而它的辐角是 z 的辐角加 θ, 上列第一个映射确定一个旋转; 第二个映射确定一个以原点为中心的相似映射. 因此映射 $w=\alpha z$ 是一个旋转及一个相似映射的复合映射.

例 3 考虑映射 $w=\dfrac{1}{z}$.

这一映射可以看作是下列两个映射的复合映射:

$$z_1=\frac{1}{\bar{z}}, w=\overline{z_1}.$$

把 z, z_1, w 都作在同一个复平面上. 显然，$w=\overline{z_1}$ 是关于实轴的对称映射; $z_1=\dfrac{1}{\bar{z}}$ 把 z 映射成 z_1, 其辐角与 z 相同:

$$\operatorname{Arg} z_1=-\operatorname{Arg}\bar{z}=\operatorname{Arg} z,$$

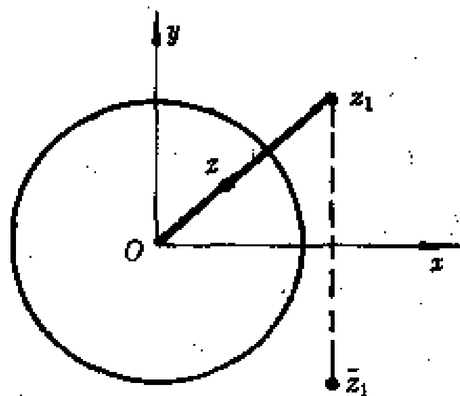


图 5

而模 $|z_1|=\left|\dfrac{1}{\bar{z}}\right|=\dfrac{1}{|\bar{z}|}=\dfrac{1}{|z|}$ 满足 $|z_1||z|=1$. 我们把中心在原点、半径为 1 的圆称为单位圆，那么 z 及 z_1 称为关于单位圆的对称点 (见第六章)(图 5).

$w=\dfrac{1}{z}$ 把原点以外的任一点映射成另一点. 把 z 及 w 表示在不同的扩充复平面上, 并设 $z=0$、∞ 对应于 $w=\infty$、0, 可以看到这一函数是从扩充 z 平面到扩充 w 平面的一个双射.

如果对于上述函数 $w=f(z)$, 集 E 及集 A 分别在 z 平面及 w 平面的实轴上, 那么 $w=f(z)$ 就是一个实变(实值)函数. 因此, 实变函数可以看作复变函数的一个特例. 在一般情况下, 考虑

$$w=u+iv$$

的实部和虚部, 可以看出"函数 $w=f(z)$ 在集 E 上确定", 也就是"对于集 E 中坐标为 x,y 的每一点, 有实数 u 及实数 v 和它相对应". 换句话说, 在集 E 上确定了两实变数 x 及 y 的两个实值函数 $u=\varphi(x,y)$ 及 $v=\psi(x,y)$, 它们分别称为 $f(z)$ 的实部及虚部, 记作 $\varphi(x,y)=\mathrm{Re}f(z)$ 及 $\psi(x,y)=\mathrm{Im}f(z)$. 于是一个复变函数 $w=f(z)$ 等价于两个实变函数 $u=\varphi(x,y)$, $v=\psi(x,y)$.

例 4 $w=z^2=(x+iy)^2=x^2-y^2+2ixy$, 等价于:

$$u=x^2-y^2, \quad v=2xy.$$

以下, 除特别说明外, 我们约定集 E 表示简单曲线、区域或闭区域.

既然一个复变函数等价于两个实变函数, 而实变函数已为人们所了解, 那么有什么理由要引进人们所不熟悉的复变函数呢? 如果上述两个实变函数 φ 及 ψ 是任意选取的, 并且在它们之间并没有特别的联系, 那么确实没有理由把它们结合成为复变函数. 可是在一些情形下, φ 及 ψ 有密切的联系, 因而把它们合并起来研究更为有利. 例 1－3 表明复变函数可用来简捷地表示一些映射; 下一段中可以看到, 复变函数可用来研究在几何和物理上都很重要的一些成对的两实变数函数.

现在先引进复变函数的极限与连续性.

设函数 $w=f(z)$ 在集 E 上确定, z_0 是 E 的一个聚点, α 是一个复常数. 如果任给 $\varepsilon>0$, 可以找到一个与 ε 有关的正数 $\delta=\delta(\varepsilon)$

>0，使得当 $z\in E$，并且 $0<|z-z_0|<\delta$ 时，

$$|f(z)-\alpha|<\varepsilon,$$

那么我们说，当 z 趋近于 z_0 时，$f(z)$ 趋近于极限 α，写作

$$\lim_{z\to z_0,\,z\in E} f(z)=\alpha. \tag{1.1}$$

在不会产生混淆的情况下，上列极限式中可省去“$z\in E$”.

令 $\alpha=a+ib$，$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$，$z_0=x_0+iy_0$，在这里 a,b,x_0,y_0 及 u,v 分别是 α，z_0 及 $f(z)$ 的实部和虚部. 由不等式 $|u(x,y)-a|$ 及 $|v(x,y)-b|\leqslant|f(z)-\alpha|\leqslant|u(x,y)-a|+|v(x,y)-b|$，容易看出，(1.1)与下面两个极限式等价：

$$\lim_{x\to x_0,\,y\to y_0} u(x,y)=a,\quad \lim_{x\to x_0,\,y\to y_0} v(x,y)=b.$$

由此可见，关于实变函数的极限的一些简单结果，例如关于两函数之和、差、积、商的极限的一些结果等等，可以不加改变地推广到复变函数.

设函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在集 E 上确定，并且 $z_0\in E$. 如果

$$\lim_{z\to z_0,\,z\in E} f(z)=f(z_0), \tag{1.2}$$

那么我们说，$f(z)$在 z_0(对于集 E)连续. 设$f(z)$在 E 上每一点连续，那么$f(z)$称为在集 E 上连续.

显然，函数$f(z)$在点 $z_0=x_0+iy_0$ 连续的条件(1.2)与下列两条件等价：

$$\lim_{x\to x_0,\,y\to y_0} u(x,y)=u(x_0,y_0),\quad \lim_{x\to x_0,\,y\to y_0} v(x,y)=v(x_0,y_0);$$

这两条件表示实变函数 $u(x,y)$及$v(x,y)$在(x_0,y_0)连续.

由此可见，实变连续函数的许多性质可以推广到复变连续函数. 首先两个复变连续函数的和、差、积、商都是连续函数(在商的情形，使分母为零的点除外). 其次，如果函数 $w=f(z)$在集 E 上连续，并且函数值属于集 F，而在集 F 上，函数 $\zeta=\varphi(w)$连续，那么复合函数 $\zeta=\varphi[f(z)]=\varphi\circ f(z)=F(z)$在 E 上连续.

关于实变连续函数的几个重要定理，可以推广到复变连续函数中去.

设函数 $f(z)$ 在集 E 上确定. **如果任给 $\varepsilon>0$, 可以找到一个与 ε 有关、但与 z 无关的正数 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, 使得当 $z', z''\in E$, 并且 $|z'-z''|<\delta$ 时, $|f(z')-f(z'')|<\varepsilon$, 那么称函数 $f(z)$ 在 E 上一致连续.**

我们有:

定理 1.1　设函数 $f(z)$ 在简单曲线或有界闭区域 E 上连续, 那么它在 E 上一致连续.

如果 $|f(z)|=\sqrt{[u(x,y)]^2+[v(x,y)]^2}$ 在集 E 上有界, 那么称 $f(z)$ 在集 E 上有界. 于是有:

定理 1.2　设函数 $f(z)$ 在简单曲线或有界闭区域 E 上连续, 那么 $f(z)$ 在 E 上有界.

在定理 1.2 的假设下, 连续函数 $|f(z)|$ 在 E 上达到它的最大值和最小值, 分别称为 $f(z)$ 在 E 上的最大模和最小模. 这样就推出了:

定理 1.3　设函数 $f(z)$ 在简单曲线或有界闭区域 E 上连续, 那么 $f(z)$ 在 E 上达到它的最大模和最小模.

定理 1.1－1.3 都可由数学分析中的相应结果推出.

关于无穷大, 有下列极限定义:

设函数 $f(z)$ 在复平面上的区域或闭区域 E 上确定. z_0 或者属于集 E, 或者是集 E 的一个极限点. **如果任给 $A>0$, 可找到一数 $\delta=\delta(A)$, 使得当 $z\in E, 0<|z-z_0|<\delta$ 时, $|f(z)|>A$, 那么我们说, 当 z 趋近于 z_0 时, $f(z)$ 趋近于(极限)无穷大,** 记作

$$\lim_{z\to z_0, z\in E} f(z)=\infty. \tag{1.3}$$

在不产生混淆的情况下, 上列极限式中可省去 $z\in E$.

设函数 $f(z)$ 在无界区域或闭区域 E 上确定, α 是一有限复常

数．如果任给 $\varepsilon>0$，可以找到一数 $\rho=\rho(\varepsilon)>0$，使得当 $z\in E$，$|z|>\rho$ 时，

$$|f(z)-\alpha|<\varepsilon,$$

那么我们说，当 z 趋近于 ∞ 时，$f(z)$ 趋近于极限 α，记作

$$\lim_{z\to\infty,\, z\in E} f(z)=\alpha \quad . \tag{1.4}$$

读者自己不难用不等式表达

$$\lim_{z\to\infty,\, z\in E} f(z)=\infty \tag{1.5}$$

的定义．我们也可在不产生混淆的情况下省去上列两极限式中的记号 $z\in E$．

以上这些定义在第四章第 8 及第 9 段中将要用到．

2. 导数・解析函数 现在把实变函数的导数概念推广到复变函数．设 $f(z)$ 是在区域 D 内确定的单值函数，并且 $z_0\in D$．如果

$$\lim_{z\to z_0,\, z\in D} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

存在，并且等于复数 α，那么我们说 $f(z)$ 在 z_0 **可微或可导**，或者**有导数** α，记作 $f'(z_0)$．换句话说，这也就是：**任给 $\varepsilon>0$，可以找到一个正数 $\delta=\delta(\varepsilon)$，使得当 $z\in D$，并且 $0<|z-z_0|<\delta$ 时，**

$$\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}-\alpha\right|<\varepsilon .$$

显然，在 z_0 有导数的函数一定在 z_0 连续．

定义 如果函数 $f(z)$ 在区域 D 内每一点可微，那么 $f(z)$ 称为在区域 D 内解析．如果 $f(z)$ 在 z_0 的一个邻域内解析，那么我们说 $f(z)$ 在 z_0 解析．如果 $f(z)$ 在区域 G 内解析，而闭区域 $\overline{D}$ 上每一点都属于 G，那么我们说 $f(z)$ 在 $\overline{D}$ 上解析．

根据这些定义，函数在一区域内或一闭区域上解析，就是它

在有关区域内或有关闭区域上每一点解析．函数$f(z)$的导数记作

$f'(z)$，$\dfrac{df(z)}{dz}$ 或 $\dfrac{df}{dz}$．

注 这里所引进的术语在现有文献中有种种不同的说法．"可微"有时称为"单演"，"解析"有时称为"单值解析"、"全纯"或"正则"．在本书中，我们只采用这里所引进的术语．

由于复变函数的导数的定义形式与实变函数的情形相同，容易证明：如果$f(z)$及$g(z)$是在区域D内的解析函数，那么$f(z)\pm g(z)$，$f(z)g(z)$以及$\dfrac{f(z)}{g(z)}$也是在D内的解析函数．不过在$\dfrac{f(z)}{g(z)}$这一情形下，还要假设$g(z)$在D内每一点都不为零．我们有

$$[f(z)\pm g(z)]'=f'(z)\pm g'(z), \tag{2.1}$$

$$[f(z)g(z)]'=f'(z)g(z)+f(z)g'(z), \tag{2.2}$$

$$\left[\frac{f(z)}{g(z)}\right]'=\frac{f'(z)g(z)-g'(z)f(z)}{[g(z)]^2}. \tag{2.3}$$

由此可见，在同一区域内有限个解析函数，经过有限次代数运算，仍然得到一个在原区域内解析的函数，不过在作除法时，除式必须在所考虑的区域内不取零值．

其次，考虑复合函数的导数．设$\zeta=f(z)$在z平面上的区域D内解析，$w=F(\zeta)$在ζ平面上的区域D_1内解析，而且当$z\in D$时，$\zeta=f(z)\in D_1$，那么$w=F[f(z)]$在D内解析，并且

$$\frac{dF[f(z)]}{dz}=\frac{dF(\zeta)}{d\zeta}\frac{df(z)}{dz}. \tag{2.4}$$

这一结果的证明与数学分析中相应结果的证明完全类似．

下面举出几个简单而重要的解析函数．根据定义，容易看出：

(1) 如果 $f(z)\equiv\alpha$(常数)，那么 $\dfrac{df(z)}{dz}=0$.

(2) $\dfrac{dz}{dz}=1$.

应用数学归纳法，由(2.2)首先得到 $\dfrac{dz^n}{dz}=nz^{n-1}$，其中 n 是一正整数．然后可推出：

(3) z 的任何多项式

$$P(z)=\alpha_0+\alpha_1 z+\cdots+\alpha_n z^n$$

在整个复平面上解析，它的导数的求法与 z 是实变数时相同．

再应用(2.3)，就有：

(4) 在复平面上，任何有理函数(即两个多项式的商)，除去使分母为零的点外是解析的，而且它的导数的求法与 z 是实变数时相同．

3. 柯西 – 黎曼条件 从以上我们看到，在形式上，复变函数的导数及其运算法则与实变函数几乎没有什么不同，可是在实质上，两者之间有很大的差别．实变函数可微这一条件是较易满足的．复变函数可微则不但其实部及虚部必须可微，而且这两实函数之间必须有特别的联系．本书着重研究这样的复变函数．它们具有重要的性质，并且具有重要的几何意义与物理意义．

要使复变函数在一点可微，它的实部和虚部应满足怎样的条件呢？下面的定理回答了这个问题．

定理 3.1 **设函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在区域 D 内确定，那么 $f(z)$ 在点 $z=x+iy\in D$ 可微的必要与充分条件是：在点 $z=x+iy$，$u(x,y)$ 及 $v(x,y)$ 可微，并且**

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x} \tag{3.1}$$

证 先证条件的必要性．设 $f(z)$ 在点 $z=x+iy\ (\in D)$ 有导数

$\alpha, \alpha=a+ib$，这里 a 及 b 是实数．根据导数的定义，当 $z+\Delta z\in D$ 时（$\Delta z\neq 0$）

$$
\begin{aligned}
f(z+\Delta z)-f(z) &= \alpha\Delta z+o(|\Delta z|) \\
&= (a+ib)(\Delta x+i\Delta y)+o(|\Delta z|)\quad (|\Delta z|\to 0),
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

其中 $\Delta z=\Delta x+i\Delta y, \Delta x$ 及 Δy 是实增量，$o(|\Delta z|)$的意义与在数学分析中相同．比较(3.2)两边的实部及虚部，就得到

$$
u(x+\Delta x, y+\Delta y)-u(x,y)=a\Delta x-b\Delta y+o(|\Delta z|)\quad (|\Delta z|\to 0), \tag{3.3}
$$

$$
v(x+\Delta x, y+\Delta y)-v(x,y)=b\Delta x+a\Delta y+o(|\Delta z|)\quad (|\Delta z|\to 0). \tag{3.4}
$$

这就是说，在点 $z=x+iy$, $u(x,y)$及 $v(x,y)$可微，并且

$$
\frac{\partial u}{\partial x}=a,\ \frac{\partial u}{\partial y}=-b,\ \frac{\partial v}{\partial x}=b,\ \frac{\partial v}{\partial y}=a, \tag{3.5}
$$

由此可推出(3.1)．

现在来证明条件的充分性．由于 $u(x,y)$及 $v(x,y)$在点 $z=x+iy$ 可微，并且(3.1)成立，我们有(3.3)及(3.4)，其中 $z+\Delta z\in D$（$\Delta z\neq 0$），a 及 b 由(3.5)给出．用 i 乘(3.4)两边，把所得结果与(3.3)相加，就得到(3.2)．这样就证明了 $f(z)$在点 $z=x+iy$ 有导数 $\alpha=a+ib$．

由定理 3.1 可以立即推出：

定理 3.2 设函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$在区域 D 内确定．$f(z)$在区域 D 内解析的必要与充分条件是：$u(x,y)$及 $v(x,y)$在 D 内可微，而且在 D 内(3.1)成立．

在 $f(z)$有导数的情况下，由(3.5)

$$
f'(z)=a+ib=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{3.6}
$$

条件(3.1)一般称为柯西－黎曼条件．它们首先是在研究流

体力学时得到的.

由定理 3.1 和3.2, 可以判断一个复变函数是否在一点可微或在一区域内解析. 例如可判断函数 $f(z)=z^2=(x^2-y^2)+2ixy$ 以及 $f(z)=e^x\cos y+ie^x\sin y$ 在复平面上解析, 而函数 $f(z)=\overline{z}=x-iy$, 则在任何点都不可微.

§2. 初 等 函 数

4. 指数函数 上一节中, 我们已经研究了复变数多项式和有理函数. 现在要把数学分析中常用的其他一些初等函数推广到复变数情形, 并且研究由推广而得的函数的解析性. 先从指数函数开始.

我们要把指数函数的定义扩充到 $\mathbb{C}$ 上, 使所得复变数 $z=x+iy$ 的函数 $f(z)$ 满足下列条件:

(1) $\forall x\in\mathbb{R}, f(x)=e^x$;

(2) $f(z)$在 $\mathbb{C}$ 上解析;

(3) $\forall z_1, z_2\in\mathbb{C}, f(z_1+z_2)=f(z_1)f(z_2)$.

现在来确定 $f(z)$. 由(3)及(1),

$$f(z)=f(x+iy)=e^xf(iy) .$$

令

$$f(iy)=A(y)+iB(y),$$

其中 $A(y)$ 及 $B(y)$ 是实值函数. 于是

$$f(z)=e^xA(y)+ie^xB(y).$$

由条件(2), 并且由柯西 - 黎曼条件,

$$A(y)=B'(y),\ A'(y)=-B(y) .$$

显然, $A(y)=\cos y$ 及 $B(y)=\sin y$ 满足上两条件, 因而得到满足条件(2)的函数是:

$$f(z)=e^x(\cos y+i\sin y).$$

不难看出, $f(z)$满足条件(1). 为了证明条件(3)在一般情形下成立, 令 $z_1=x_1+iy_1, z_2=x_2+iy_2$, 其中 $x_1, y_1, x_2, y_2\in\mathbb{R}$. 我们有

$$f(z_1)f(z_2)=e^{x_1}(\cos y_1+i\sin y_1)e^{x_2}(\cos y_2+i\sin y_2)$$

$$= e^{x_1+x_2}[\cos(y_1+y_2)+i\sin(y_1+y_2)]$$
$$= f(z_1+z_2).$$

这样，$f(z)$是满足条件(1)—(3)，并且在 $\mathbb{C}$ 上解析的一个函数[1]，把它定义为指数函数，记作

$$e^z = e^x(\cos y + i\sin y). \tag{4.1}$$

于是条件(3)可写作：

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}. \tag{4.2}$$

还可证明指数函数 e^z 满足下列条件：

(4) $\forall z \in \mathbb{C}, e^z \neq 0$;

(5) 在$\mathbb{C}$ 上，

$$\frac{de^z}{dz} = e^z. \tag{4.3}$$

事实上， 由 $|e^z| = e^x \neq 0$ 就得到条件(4). 条件(5)可由(3.6)立即推出.

在(4.1)中令 $z=0$, 就得到欧拉公式:

$$e^{iy} = \cos y + i\sin y. \tag{4.4}$$

利用欧拉公式，具有模数 r 及辐角 θ 的复数 z 可以写成常用的指数表示式(一般用它代替三角表示式):

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}. \tag{4.5}$$

由(4.1)，容易看出指数函数 $w = e^z$ 具有周期性，而且有周期 $2\pi i$. 这就是说

$$e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z. \tag{4.6}$$

同样，$\forall k \in \mathbb{Z}$,

$$e^{z+2k\pi i} = e^z. \tag{4.7}$$

如果 $e^{z_1} = e^{z_2}$, 那么 $z_1 = z_2 + 2k\pi i$, 其中 $k \in \mathbb{Z}$. 事实上，用 x_1, y_1 及 x_2, y_2 分别表示 z_1 及 z_2 的实部与虚部，由

$$e^{z_1-z_2} = 1$$

---

① 由以下第四章，第 6 段，它是满足条件(1)—(3)的唯一解析函数.

就可推出 $x_1-x_2=0, y_1-y_2=2k\pi$.

由于 $w=e^z$ 有周期 $2\pi i$, 我们研究当 z 在带形

$$B=\{z|z\in\mathbb{C}, 0<\operatorname{Im}z<2\pi\} \tag{4.8}$$

中变化时，函数 $w=e^z$ 的映射性质. 设 w的实部及虚部分别为 u 及 v.

设 z 从左向右描出一条直线 L: $\operatorname{Im}z=y_0$, 那么 $w=e^{x+iy_0}$,于是 $|w|$ 从 0(不包括 0)增大到 $+\infty$, 而 $\arg w=y_0$ 保持不变. 因此，w 描出一条射线 L_1:$\arg w=y_0$(不包括 $w=0$)(图 6). 这样，L 和 L_1 上的点之间构成一个双射. 让 y_0 从 0(不包括 0)递增到 2π(不包括 2π), 那么直线 L 扫过 B(图 6 a), 而相应的射线 L_1 按反时

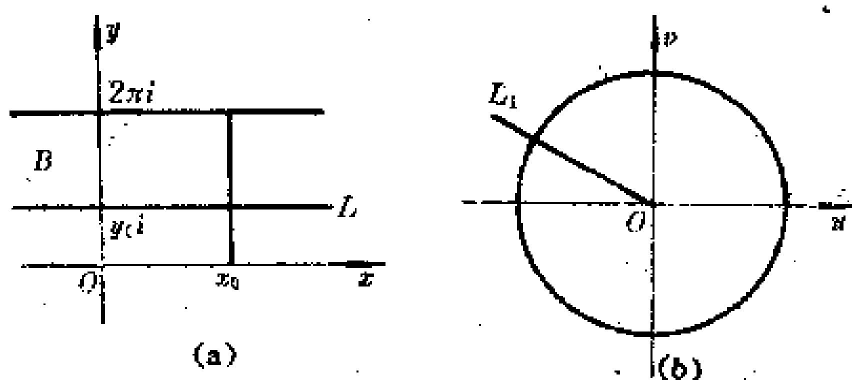


图 6

针方向从 w 平面上的正实轴(不包括它)变到正实轴(不包括它)(图 6b). 由此可见，$w=e^z$ 确定从带形 B 到 w 平面除去原点及正实轴的一个双射.

显然，函数 $w=e^z$ 把直线 $\operatorname{Re}z=x_0$ 在 B 上的一段映射成 w 平面上的一个圆 $|w|=e^{x_0}$除去 u 轴上的一点 e^{x_0}.

用同样的方法可知，函数$w=e^z$ 把任何带形

$$B_a=\{z|z\in\mathbb{C}, a\in\mathbb{R}, a<\operatorname{Im}z<a+2\pi\}$$

双射成 w 平面除去 0 及射线 $\arg w=a$; 特别，它确定从带形 $B_{2n\pi}$ ($n\in\mathbb{Z}$; $B_0=B$)到 w 平面除去 0 及正实轴的双射.

5. 多值函数导引：辐角函数 以上研究过的复变数初等函数有多项式、有理函数及指数函数；它们都是单值函数。我们还要研究一些复变数初等多值函数。因为这些函数的多值性是由辐角的多值性引起的，所以我们先研究辐角函数 $w=\operatorname{Arg}z(z\in\mathbb{C}-\{0\})$；它本身不是一般意义下的复变数初等函数.

如上章第 1 段中所指出，当 $z\in\mathbb{C}-\{0\}$时，$w=\operatorname{Arg}z$ 有无穷个不同的值：

$$w=\operatorname{Arg}z=\arg z+2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z}), \tag{5.1}$$

其中 $\arg z$ 表示 $\operatorname{Arg}z$ 的主值：

$$-\pi<\arg z\leqslant\pi;$$

我们也把 $\operatorname{Arg}z$ 的任一个确定的值记作 $\arg z$.

为了研究方便起见，我们把辐角函数(5.1)在某些区域内分解为一些单值连续函数，每一个单值连续函数称为辐角函数在这区域内的一个单值连续分枝.

考虑复平面除去负实轴(包括 0)而得的区域 D. 显然，在 D 内，$\operatorname{Arg}z$ 的主值 $\arg z(-\pi<\arg z<\pi)$是一个单值连续函数，$\arg z+2k\pi(k\in\mathbb{Z})$也是这样. 因此 $w=\operatorname{Arg}z$ 在区域 D 内可以分解成(5.1)中所表示出的无穷多个单值连续函数，它们都是 $w=\operatorname{Arg}z$ 在区域 D 内的单值连续分枝.

上述区域 D 可以看成是把复平面沿负实轴割开而得到的. 负实轴称为一条割线，它是区域 D 的边界；我们把这割线看作有不同的上、下两沿. 函数 $w=\operatorname{Arg}z$ 的每一单值连续分枝可以扩充成为直到负实轴(除去 0)的上沿及下沿连续的函数，扩充的函数值称为上述单值连续分枝在负实轴的上沿及下沿所取的值. 显然，同一单值连续分枝在负实轴的上沿及下沿所取的值不同. 例如 $w=\operatorname{Arg}z$ 的主值分枝 $w=\arg z$ 在负实轴的上沿及下沿分别取值 π 及 $-\pi$.

现在研究在较一般区域内把辐角函数 $w=\operatorname{Arg}z\ (z\neq0)$分解成单值连续分枝问题.

设 z_0 为复平面上一点. 在 z_0 的充分小的邻域内(若 $z_0\neq0$，则

此邻域不含0)，任作一条闭简单连续曲线 C 围绕 z_0，也就是使 z_0 属于 C 的内区域. 在 C 上任取一点 z_1，并且确定 Arg$z$ 在 z_1 的值为 arg$z_1 = \theta_1$. 让一点从 z_1出发按某一方向沿 C 连续变动，最后回到 z_1；设 arg$z$ 相应地从 θ_1 连续变动到 θ_1'. 如果 $z_0 \neq 0$，那么 $\theta_1' - \theta_1 = 0$；否则$\theta_1' - \theta_1 = \pm 2\pi$.

其次，考虑在扩充复平面上情况. 在无穷远点的充分"小"的邻域内，即在 $|z| > R$内，其中 R 为充分大的正数，任作一条闭简单连续曲线 C 围绕 ∞，亦即使圆 $|z| = R$ 包含在 C 的内区域内. 这时在 C 上任取一点 z_1，并确定 Arg$z$ 在这点的值 argz_1. 让一点从 z_1 出发按某一方向沿 C 连续变动，在回到 z_1 时，arg$z$ 连续变动所得的值也要变化.

由此可见，对 Arg$z$ 来说，0 及 ∞ 是特殊的两点. 在复平面上，取连接0及 ∞ 的一条无界简单连续曲线 K_1[①] 作为割线，得一区域 D_1，其边界就是曲线 K_1. 在 D_1 内，任一条闭简单连续曲线 C 既不围绕 0，也不围绕 ∞. 因此当 z 沿这曲线连续变动一周时，arg$z$ 连续变动而得的值没有变化.

其次，考虑 D_1 内任一条闭折线；构成它的各线段可能有有限个交点，也可能有有限条相重合的线段，于是这条闭折线可分解成有限条闭简单折线及有限条线段. 因此当一点 z 沿已给闭折线连续变动一周时，要经过分解出的闭简单折线，并且要往返经过上述线段，从而这时 arg$z$ 连续变动而得的值也没有变化.

现在证明 Arg$z$ 在 D_1 内可以分解成单值连续分枝.

当 K_1 是从原点出发的负轴时，上述结论前面已经讲到.

在 K_1 是一般的情况下，现着手证明上述结论. 首先注意，由于不含原点的圆盘可以包含在一个以原点为顶点的角形内，在这圆盘内可以把 Arg$z$ 分解成单值连续分枝. 应用这一结果，从 Arg$z$ 在 D_1 内一点处的值出发，可以适当确定 Arg$z$ 在 D_1 内其他

① 这是一条通向无穷远的曲线，它在原点与其上另外任一点之间的部分都是简单连续曲线. 负实轴是一特例.

各点的值，由此得到 Arg$z$ 在 D_1 内的一个单值连续分枝.

设 $z_1 \in D_1$. 取 Arg$z$ 在 z_1 的值为 $\arg z_1 = \theta_1$. 设 $z_2 (\neq z_1) \in D_1$. 在 D_1 内作一条连接 z_1 及 z_2 的简单连续曲线 γ，设当 z 从 z_1 沿 γ 连续变动到 z_2 时，$\arg z$ 从 θ_1 连续变动到 θ_2. 因为 γ 是 D_1 内的一个紧集(即有界闭集)，所以可以依序用有限个在 D_1 内且不含原点的圆盘 $C_1, C_2, \cdots, C_k$ 覆盖 γ，使得 $z_1 \in C_1$，$z_2 \in C_k$，$C_j \cap C_{j+1} \neq \varphi$ $(j = 1, 2, \cdots, k-1)$. 从Arg$z$ 在 z_1 的值 $\arg z_1 = \theta_1$ 出发，可依序确定 Arg$z$ 在 C_j 内的单值连续分枝 $g_j(z)(j = 1, \cdots, k)$，使得在 $C_j \cap C_{j+1}$ 内，$g_j(z) = g_{j+1}(z)$ $(j = 1, \cdots, k-1)$. 于是 $g_k(z_2) = \theta_2$. 取 $\zeta_j \in C_j \cap C_{j+1} \cap \gamma$，作顶点依次为 $z_1, \zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_{k-1}, z_2$ 的折线 γ^*. 可见当 z 从 z_1 沿 γ^* 连续变动到 z_2 时，$\arg z$ 也从 θ_1 连续变动到 θ_2.

在 D_1 内另外任作一条连接 z_1 及 z_2 的简单连续曲线 γ_1. 当 z 从 z_1 沿 γ_1 连续变动到 z_2 时，设 $\arg z$ 从 θ_1 连续变动到 θ_2'. 和上面一样，从 z_1 到 z_2 可作出 γ_1 在 D_1 内的一条内接折线 γ_1^*，使得当 z 从 z_1 沿 γ_1^* 连续变动到 z_2 时，$\arg z$ 也从 θ_1 连续变动到 θ_2'. 现取 Arg$z$ 在 z_2 的值为 $\arg z_2 = \theta_2'$. 让 z 先从 z_2 沿 γ_1^* 连续变动到 z_1，再从 z_1 沿 γ^* 连续变动回到 z_2. 由本段中前述结果，可见必然有 $\theta_2' = \theta_2$. 这就是说，取定 Arg$z$ 在 $z_1 \in D_1$ 处的值 $\arg z_1 = \theta_1$. 当 z 从 z_1 沿着 D_1 内的一条简单连续曲线 γ 连续变动到 z_2 时，设 $\arg z$ 从 θ_1 连续变动到 θ_2; 这里 θ_2 只与 θ_1, z_1 及 z_2 有关，与曲线 γ 的选取无关. 取 Arg z 在 z_2 处的值为 $\arg z_2 = \theta_2$. 这样取定 Arg$z$ 在 D_1 内各点处的值，于是得到 D_1 内的一个单值连续函数，记作 $\arg z(\arg z_1 = \theta_1)$; 它是 Arg$z$ 在 D_1 内的一个单值连续函数分枝.

把 $\arg z(\arg z_1 = \theta_1)$ 记作 $f(z)$. 现证明 Arg$z$ 在 D_1 内所有值可分成无穷个单值连续分枝 $f(z) + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

事实上，$f(z) + 2k\pi$ 显然是 Arg z 在 D_1 内的单值连续分枝. 假定 $g(z)$ 是 Arg z 在 D_1 内另一个单值连续分枝. 那么差式

$$h(z)=\frac{f(z)-g(z)}{2\pi}$$

是 D_1 内只取整数值的连续函数．由于 D_1 是一个区域，$\exists\, k\in\mathbb{Z}$，使得 $g(z)=f(z)+2k\pi$．显然，$\{f(z)+2k\pi|k\in\mathbb{Z},z\in D_1\}=\{\mathrm{Arg}z|\,z\in D_1\}$．证完．

现在阐明 $\mathrm{Arg}z$ 在任一点(非原点)的各值之间的联系．在复平面上任取一点 $z_1\neq 0$，并且通过 z_1 作一条闭简单连续曲线围绕 0 及 ∞，让一点 z 从 z_1 按一定方向连续变动若干周后回到 z_1，$\mathrm{Arg}z$ 相应地可从在 z_1 的一值连续变动到它在 z_1 预先指定的其他任一值，即从 $\mathrm{Arg}z$ 的一个单值连续分枝在 z_1 的值，连续变动到预先指定的其他单值连续分枝在 z_1 的值．

例 在 $\mathbb{C}$ 上作割线

$$K=\{z||z+1|=1,\mathrm{Im}z\geqslant 0\}\cup(-3,-2)$$
$$\cup\{z\,||z+4|=1,\mathrm{Im}z\leqslant 0\}\cup(-\infty,-5),$$

得到区域 $D=\mathbb{C}-K$．取 $\mathrm{Arg}\,z$ 在 D 内的一个单值连续分枝 $f(z)=\arg z(\arg 1=0)$，那么

$$f(-1)=-\pi,\ f(-4)=\pi,$$

而 $\mathrm{Arg}z$ 在 D 内的无穷个单值连续分枝是 $f(z)+2k\pi\quad(k\in\mathbb{Z})$．

6．对数函数 已给复数 $z\neq 0$，满足 $z=e^w$ 的复数 w 称为 z 的对数，记作 $\mathrm{Ln}z$，令 u 及 v 为 w 的实部及虚部，那么 $z=e^{u+iv}=e^ue^{iv}$，从而

$$w=\mathrm{Ln}z=\ln|z|+i\mathrm{Arg}z. \tag{6.1}$$

把 z 看作不等于零的复变数，(6.1)就是 z 的对数函数；它是指数函数 $z=e^w$ 的反函数(反函数的定义可与数学分析中一样叙述)．由于 $\mathrm{Arg}z$ 是无穷多值函数，$w=\mathrm{Ln}z$ 也是无穷多值函数．

相应于 $\mathrm{Arg}z$ 的主值，我们把 $\ln|z|+i\arg z\,(-\pi<\arg z\leqslant\pi)$ 定义为 $\mathrm{Ln}z$ 的主值，记作 $\ln z$．于是由(6.1)，

$$w=\mathrm{Ln}z=\ln|z|+i\arg z+2k\pi i=\ln z+2k\pi i\quad(k\in\mathbb{Z}) \tag{6.2}$$

以后把Lnz的任一个确定的值都记作 ln$z$.

由此可见，**任何不是零的复数有无穷多个对数，其中任意两个相差 $2\pi i$ 的整数倍**．如果 z 是正实数，那么 Lnz 的主值 $\ln z=\ln|z|$ 恰好就是数学分析中所研究的对数．

关于积和商的对数，有下列法则：设 z_1及 z_2 是不等于零的复数，我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{Ln}(z_1z_2)&=\ln|z_1z_2|+i\mathrm{Arg}(z_1z_2)\\&=\ln|z_1|+\ln|z_2|+i(\mathrm{Arg}z_1+\mathrm{Arg}z_2)\\&=\mathrm{Ln}z_1+\mathrm{Ln}z_2,\end{aligned}\tag{6.3}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Ln}\frac{z_1}{z_2}&=\ln\left|\frac{z_1}{z_2}\right|+i\mathrm{Arg}\frac{z_1}{z_2}\\&=\ln|z_1|-\ln|z_2|+i(\mathrm{Arg}z_1-\mathrm{Arg}z_2)\\&=\mathrm{Ln}z_1-\mathrm{Ln}z_2.\end{aligned}\tag{6.4}$$

等式(6.3)及(6.4)应理解如下：对于它们左边的多值函数的任一值，一定有右边两多值函数的各一值与它对应，使得有关等式成立;反过来也是这样.

由于对数函数(6.1)的多值性是由 Arg$z$ 的多值性引起的，而且 $\ln|z|$ 在 $\mathbb{C}-\{0\}$中任一点的邻域内连续，可见对数函数(6.1)在某些区域内也可分解为一些单值连续函数，其中每一个称为对数函数在这区域内的一个单值连续分枝.

在复平面上取负实轴作为割线，得到区域 D. $w=\mathrm{Ln}z$ 在区域 D 内可以分解成为(6.2)中所表示出的无穷多个单值连续函数，它们都是 $w=\mathrm{Ln}z$ 在区域 D 内的单值连续分枝.

区域 D 的边界负实轴可以看作有不同的上、下两沿．函数 $w=\mathrm{Ln}z$ 的每一单值连续分枝可以扩充成为直到负实轴(除去 0)的上沿及下沿连续的函数．扩充的函数值称为上述单值连续分枝在负**实轴的上沿及下沿所取的值**．显然，同一单值连续分枝在负实轴的上沿及下沿所取的值不同．例如 $w=\ln z$ 在负实轴上沿及下沿

的值分别有虚部 $i\pi$ 及 $-i\pi$.

一般地，在复平面上，取连接0及 ∞ 的任一条无界简单连续曲线 K_1 作为割线.设区域 $D_1=\mathbb{C}-K_1$,并且 $z_1\in D_1$.取定 $\arg z_1=\theta_1+2k\pi$ 及 $\ln z_1=\ln|z_1|+i\theta_1+i2k\pi(k\in\mathbb{Z})$. 与 $\operatorname{Arg}z$ 在 D_1 内的分解相对应，可把对数函数(6.1)在 D_1 内分解成无穷个单值连续函数分枝，记作

$$w=\ln z(\ln z_1=\ln|z_1|+i\theta_1+i2k\pi)\quad(k\in\mathbb{Z}).$$

这样，在区域 D_1 内，(6.2)可记作

$$w=\ln z(\ln 1=i2k\pi)\quad(k\in\mathbb{Z}).$$

对数函数在任何区域内的单值连续分枝都是解析的. 我们有下列结果：

如果 $f(z)$ 是 $\operatorname{Ln}z$ 在区域 G 内的一个单值连续分枝，那么在 G 内，$f(z)$ 解析，并且

$$f'(z)=\frac{1}{z}. \tag{6.5}$$

这一结果不难证明：设 $z\in G$. 由于 $e^{f(z)}=z$,对于模充分小的复数 $h\neq 0$,我们有

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h}=\frac{f(z+h)-f(z)}{e^{f(z+h)}-e^{f(z)}}.$$

令 $w_1=f(z+h)$，显然 $w_1-f(z)\neq 0$,并且当 h 趋近于0时，w_1 趋近于 $f(z)$. 于是下列极限成立：

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}=\lim_{w_1\to f(z)}\left[\frac{1}{\dfrac{e^{w_1}-e^{f(z)}}{w_1-f(z)}}\right]=\frac{1}{\dfrac{de^{f(z)}}{df(z)}}$$

$$=\frac{1}{e^{f(z)}}=\frac{1}{z}.$$

因为在 G 内显然不含原点，所以 $\frac{1}{z}$ 在 G 内连续. 上述结果得证.

在上述结果中，$f(z)$ 称为 $\operatorname{Ln}z$ 在 G 内的一个解析分枝. 根据这一结果，多值函数 $w=\operatorname{Ln}z$ 在上述区域 D 及 D_1 内可分成无

穷个解析分枝[1]，它是一个多值解析函数．在本书中，我们说解析函数总是指单值解析函数．

原点及无穷远点对于对数函数 $w=\mathrm{Ln}z$ 有特殊的意义．在 0 或 ∞ 的充分“小”的邻域内，任作一闭简单连续曲线 C 围绕 0 或 ∞．根据 $\mathrm{Arg}z$ 的连续变化情况，当一点 z 从 C 上一点 z_1 出发沿 C 连续变动一周时，$\mathrm{Ln}z$ 从它在 z_1 的任一值连续变动到其他一值．因此我们把原点及无穷远点称为对数函数 $w=\mathrm{Ln}z$ 的枝点．这两枝点还具有下列性质：当 z 从 z_1 出发沿 C 按一定方向连续变动无论多少周时，$w=\mathrm{Ln}z$ 总不可能从它在 z_1 的任一值连续变动到同一值．由于这一性质，我们把原点及无穷远点称为 $w=\mathrm{Ln}z$ 的无穷阶枝点，特别称为对数枝点．对于其他多值解析函数，我们也相应地定义枝点及枝点的阶数．

引进枝点概念后，可见 C 是连接 $w=\ln z$ 的两枝点的曲线．

其他一些初等多值函数也是多值解析函数，可以用类似的方法处理它们．首先确定它们的枝点，然后在复平面上以连接枝点的曲线作割线，得一区域．在这区域内，可把有关多值函数分解成解析函数分枝．

与指数函数情形一样，可推出 $w=\mathrm{Ln}z$ 的映射性质．它的一个分枝

$$w=\ln|z|+i\arg z+2k\pi i\ (-\pi<\arg z<\pi)$$

把 z 平面上的区域 D 双射成 w 平面上由

$$(2k-1)\pi<\mathrm{Im}w<(2k+1)\pi$$

所确定的带形($k=0,\pm1,\pm2,\cdots$)．

7．幂函数　设 α 是任何实数或复数．对于 $z\neq0$，用下列等式定义 z 的 α 次幂函数：

$$w=z^\alpha=e^{\alpha\mathrm{Ln}z}. \tag{7.1}$$

在 α 是正实数的情形，补充规定当 $z=0$ 时，$z^\alpha=0$．

---

[1] 有关解析分枝在负实轴或正实轴上沿及下沿所取的值，即相应单值连续分枝在该处所取的值．

由(6.2),

$$w=z^{\alpha}=e^{\alpha\ln z}e^{\alpha\cdot 2k\pi i}\ (\ln 1=0,\ -\pi<\arg z\leqslant\pi)\ (k\in\mathbb{Z})$$

可见对同一 $z\neq 0$, $w=z^{\alpha}$ 的不同数值的个数等于不同数值的因子

$$e^{\alpha\cdot 2k\pi i}\quad(k\in\mathbb{Z})$$

的个数. 由于 e^{z} 当且只当 $z=2k\pi i$ $(k\in\mathbb{Z})$时取值 1, 不难看出:

(1) 如果 α 是有理数, 其既约分数表示式是 $\dfrac{m}{n}$, 其中 $n\geqslant 1$, 那么 z^{α} 是 n 值的. 特别, 当 α 是整数时, z^{α} 是单值的.

(2) 如果 α 是无理数或虚数, 那么 z^{α} 是无穷多值的.

设在区域 G 内, 我们可以把 $\mathrm{Ln}z$ 分成无穷个解析分枝. 对于 $\mathrm{Ln}z$ 的一个解析分枝, 相应地 z^{α} 有一个单值连续分枝. 根据复合函数求导数的法则, $w=z^{\alpha}$ 的这个单值连续分枝在 G 内解析, 并且

$$\frac{dw}{dz}=\alpha\cdot\frac{1}{z}e^{\alpha\ln z}=\alpha\cdot\frac{z^{\alpha}}{z},\tag{7.2}$$

其中 z^{α} 应当了解为对它求导数的那个分枝, $\ln z$ 应当了解为对数函数的相应分枝.

对应于 $\mathrm{Ln}z$ 在 G 内任一个解析分枝: 当 α 是整数时, z^{α} 在 G 内是同一解析函数; 当 $\alpha=\dfrac{m}{n}$ (既约分数, $n>1$)时, z^{α} 在 G 内有 n 个解析分枝; 当 α 是无理数或虚数时 z^{α} 在 G 内有无穷个解析分枝. 在后两种情形下, z^{α} 是多值解析函数.

例如当 n 是大于 1 的整数时, $w=z^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{z}$ 称为根式函数, 它是 $z=w^{n}$ 的反函数. 当 $z\neq 0$时, 有:

$$\begin{aligned}w=\sqrt[n]{z}&=e^{\frac{1}{n}\ln z}\cdot e^{\frac{1}{n}2k\pi i}=e^{\frac{1}{n}(\ln|z|+i\arg z)}\cdot e^{\frac{1}{n}2k\pi i}\\&=\sqrt[n]{|z|}\,e^{i\frac{1}{n}(\arg z+2k\pi)}\\&\quad(-\pi<\arg z\leqslant\pi;\ k\in\mathbb{Z}).\end{aligned}$$

这函数是 n 值的. 在复平面上以负实轴(包括 0)为割线而得的区域 D 内, 它有 n 个不同的解析分枝:

$$w=\sqrt[n]{|z|}\,e^{i\frac{\arg z+2k\pi}{n}}\ (-\pi<\arg z<\pi;\ k=0,1,2,\cdots,n-1).$$

它们也可记作

$$w=\sqrt[n]{z}\qquad(\sqrt[n]{1}=e^{i\frac{2k\pi}{n}}).$$

这些分枝在负实轴上沿及下沿所取的值，与相应的连续分枝在该处所取的值一致.

当 α 不是整数时，原点及无穷远点是 $w=z^{\alpha}$ 的枝点. 可是按照 α 是有理数或者不是有理数，这两枝点具有不同的性质. 与上段中一样，在 0 或 ∞ 的充分小的邻域内，任作一闭简单连续曲线 C 围绕 0 或 ∞. 在 C 上任取一点 z_1，确定Arg$z$ 在 z_1 的一值 $\arg z_1=\theta_1$；相应地确定

$$w=z^{\alpha}=e^{\alpha(\ln|z|+i\mathrm{Arg}z)}.$$

在 z_1 的一值 $e^{\alpha(\ln|z_1|+i\arg z_1)}=e^{\alpha\ln z_1}$. 现考虑下列两种情况:

(1) α 是有理数 $\frac{m}{n}$（既约分数，$n\geqslant 2$） 当一点 z 从 z_1 出发按反时针或顺时针方向连续变动 n 周时，$\arg z$ 从 θ_1 连续变动到 $\theta_1\pm 2n\pi$，而 $w=z^{\frac{m}{n}}$，则从 $e^{\frac{m}{n}\ln z_1}=e^{\frac{m}{n}(\ln|z_1|+\theta_1)}$ 相应地连续变动到

$$e^{\frac{m}{n}(\ln z_1+i2n\pi)}=e^{\frac{m}{n}\ln z_1},$$

亦即第一次回到了它从 z_1 出发时的值. 由于这一性质，我们把原点及无穷远点称为 $w=z^{\frac{m}{n}}$ 的 $n-1$ 阶枝点，特别称为 $n-1$ 阶代数枝点. 对于其他多值函数，我们也相应地定义枝点的阶数.

(2) α 不是有理数　这时不难验证原点及无穷远点是 $w=z^{\alpha}$ 的无穷阶枝点.

当 α 不是整数时，在复平面上，任取连接 $w=z^{\alpha}$ 的两枝点 O 及 ∞ 的一条无界简单连续曲线 C_1 作为割线，得一区域 D_1. 在 D_1 内，可以把 $w=z^{\alpha}$ 分成解析分枝. 特别，可取从原点出发的任何

射线作为割线.

现研究 $w=z^a$ 的映射性质，其中 a 是一正实数. 设 ω 是一实数，并且 $0<\omega, a\omega<2\pi$. 在 z 平面上取正实轴(包括原点)作为割线，得一区域 D^*. 考虑 D^* 内的角形 $A: 0<\operatorname{Arg}z<\omega$，并且取 z^a 在 D^* 内的一个解析分枝

$$w=z^a \quad (1^a=1).$$

当 z 描出 A 内一条射线 $l: \arg z=\theta_0$ 时(不包括 $z=0$)，w 在 w 平面内描出一条射线 $l_1: \arg w=a\theta_0$. 让 θ_0 从 0 增加到 ω(不包括 0 及 ω)，那么射线 l 扫过角形 A，而相应的射线 l_1 扫过角形 A_1: $0<\arg w<a\omega$. 因此 $w=z^a(1^a=1)$把夹角为 ω 的角形 A 双射成夹角为 $a\omega$ 的角形 A_1(图 7). 显然，这一函数把 A 中以原点为心的圆弧映射成 A_1 中以原点为心的圆弧.

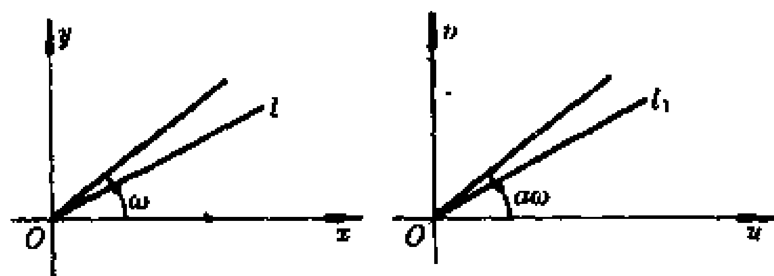


图 7

用类似的方法可以看出，当 $n(>1)$是正整数时，$w=\sqrt[n]{z}$ 的 n 个分枝

$$w=\sqrt[n]{z} \qquad (\sqrt[n]{1}=e^{i\frac{2k\pi}{n}})$$

$$(k=0,1,2,\cdots,n-1),$$

分别把区域 D^* 双射成 w 平面上的 n 个角形

$$\frac{2k\pi}{n}<\arg w<\frac{2(k+1)\pi}{n}.$$

现举例研究多项式的根式的解析分枝.

例 1 作出一个含i 的区域，使得函数

$$w=\sqrt{z(z-1)(z-2)}$$

在这区域内可分解成解析分枝；求一个分枝在点 i 的值.

我们知道

$$w=|z(z-1)(z-2)|^{\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{2}[\mathrm{Arg}\,z+\mathrm{Arg}\,(z-1)+\mathrm{Arg}(z-2)]}.$$

先求函数 w 的枝点. 由于 $z^{\frac{1}{2}}$ 的枝点是 0 及 ∞, 函数 w 的可能的枝点是 0, 1, 2 及 ∞, 任作一条简单连续闭曲线 C, 使其不经过 0, 1 及 2, 并使其内区域含 0, 但不含 1 及 2. 设 z_1 是 C 上一点. 我们确定 $\mathrm{Arg}z$, $\mathrm{Arg}(z-1)$ 及 $\mathrm{Arg}(z-2)$ 在这点的值 $\arg z_1$, $\arg(z_1-1)$及 $\arg(z_1-2)$(图8).

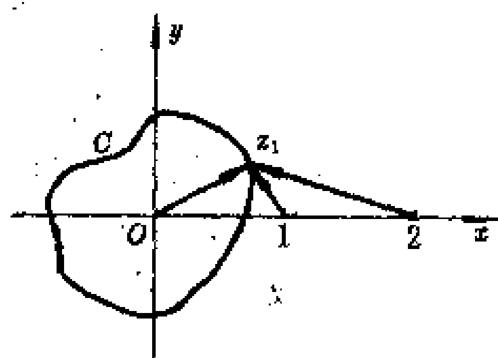


图 8

当 z 从 z_1 按反时针方向沿 C 连续变动一周时, 通过连续变动, $\arg z_1$ 增加了 2π, 而$\arg(z_1-1)$及 $\arg(z_1-2)$没有变化. 于是 w 在 z_1 的值就从

$$|z_1(z_1-1)(z_1-2)|^{\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{2}[\arg z_1+\arg(z_1-1)+\arg(z_1-2)]}=w_1$$

连续变动到

$$|z_1(z_1-1)(z_1-2)|^{\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{2}[\arg z_1+2\pi+\arg(z_1-1)+\arg(z_1-2)]}=-w_1.$$

因此 0 是函数 w 的枝点; 同样可证明 1 及 2 也是它的枝点. 任作一条简单连续闭曲线, 使其内区域含 0, 1 及 2, 可证明 ∞ 是函数 w 的枝点[1].

在复平面上取连接 0, 1, 2 及 ∞ 的任一条无界简单连续曲线作为割线, 在所得区域内, 可把 w 分成连续分枝. 例如可取 $[0,+\infty)$作为复平面上这样的割线, 得区域 D.

---

[1] 所作曲线的外区域含 ∞, 但不含 0, 1, 及 2.

其次，任作一条简单连续闭曲线 C_1，使其不经过 0, 1 及 2，并使其内区域含这三点中的两点，但不含另一点．设 z_2 是 C_1 上一点，确定 w 在 z_2 的一个值，与上面一样，当 z 从 z_2 沿 C_1 连续变化一周回到 z_2 时，w 连续变化而得的值不会改变．

于是在复平面上取线段 $[0,1]$ 以及从2出发且不与 $[0,1]$ 相交的任何射线作为割线，在所得区域内，可把 w 分成连续分枝．例如可取 $[0,1]$ 及 $[2,+\infty)$ 作为复平面上这样的割线，得区域 D_1．

求 w 在 D 或 D_1 内的一个解析分枝

$$w=\sqrt{z(z-1)(z-2)}\qquad (w(-1)=-\sqrt{6}\,i)$$

在 $z=i$ 的值．

在 $z=-1$，取

$$\arg z=\pi,\ \arg(z-1)=\pi,\ \arg(z-2)=\pi.$$

于是在 D 或 D_1 内，w 可分成两个解析分枝：

$$w=|z(z-1)(z-2)|^{\frac{1}{2}}e^{\frac{i}{2}[\arg z+\arg(z-1)+\arg(z-2)+2k\pi]}$$

$$=|z(z-1)(z-2)|^{\frac{1}{2}}e^{\frac{i}{2}[\arg z+\arg(z-1)+\arg(z-2)]+ik\pi}$$

$$(k=0,1).$$

由于所求的分枝在 $z=-1$ 的值为 $-\sqrt{6}\,i$，可见这一分枝是

$$w=|z(z-1)(z-2)|^{\frac{1}{2}}e^{\frac{i}{2}[\arg z+\arg(z-1)+\arg(z-2)]}$$

由图9，在 D 或 D_1 内 $z=i$ 处，

$$\arg z=\frac{\pi}{2},\ \arg(z-1)=\frac{3\pi}{4},$$

$$\arg(z-2)=\pi-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}.$$

因此 w 的所求分枝在 $z=i$ 的值是

$$-\sqrt[4]{10}\,e^{\frac{i}{2}\left(\frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)}=-\sqrt[4]{10}\,e^{\frac{i}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{3}}.$$

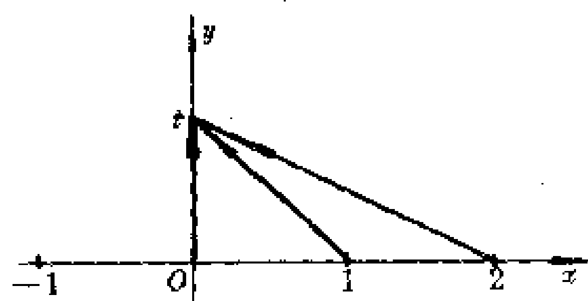


图 9

例 2 验证函数$w=\sqrt[4]{z(1-z)^3}$ 在区域 $D=\mathbb{C}-[0,1]$ 内可以分解成解析分枝；求出这函数在$(0,1)$上沿取正实值的一个分枝在 $z=-1$ 处的值及函数在$(0,1)$下沿的值.

我们有

$$w=|z(1-z)^3|^{\frac{1}{4}}e^{\frac{i}{4}[\mathrm{Arg}z+3\mathrm{Arg}(1-z)]}.$$

不难看出，$z=0$及1是w的三阶枝点，可以证明∞不是它的枝点.

事实上，任作一条简单连续闭曲线C'，使其内区域含0及1. 设z'是C'上的一点，取定w在z'的一个值. 当z从z'出发连续变化一周回到z'时，w连续变化而得的值不变.

由此可见，在区域$D=\mathbb{C}-[0,1]$内，可以把w分成解析分枝. 现在选取在$(0,1)$上沿取正实值的那一枝，即在$(0,1)$的上沿，$\arg w=0$, $w=\sqrt[4]{x(1-x)^3}$，其中$0<x<1$，根号表示算术根. 求这一枝在$z=-1$的值.

在$(0,1)$上沿，可取$\arg z=0$, $\arg(1-z)=0$. 于是所求的一枝为

$$w=|z(1-z)^3|^{\frac{1}{4}}e^{\frac{i}{4}[\arg z+3\arg(1-z)]}.$$

在D内$z=-1$处，

$$\arg z=\pi,\ \arg(1-z)=0.$$

于是 w 的指定的一枝在 $z=-1$ 处的值是

$$\sqrt[4]{8}\,e^{i\frac{\pi}{4}}=\sqrt[4]{2}\,(1+i).$$

现在考虑上述单值枝在(0, 1)下沿取值的情况. 在区域 D 内,如图 10, 当 z 沿曲线 C_1, 从(0, 1)的上沿变动到下沿时, $\arg z$ 没有变化, 而 $\arg(1-z)$ 减少了 2π. 于是在(0, 1)的下沿, $\arg w=-\frac{3\pi}{2}$. 如果 z 沿曲线 C_2 从(0, 1)的上沿变到下沿时, $\arg z$ 增加了 2π, 而 $\arg(1-z)$ 没有变化. 于是在(0, 1)下沿, $\arg w=\frac{\pi}{2}$. 无论怎样, 当 $z=x$ 在(0, 1)下沿时, 上述单值枝的值是

$$w=i\sqrt[4]{x(1-x)^3}.$$

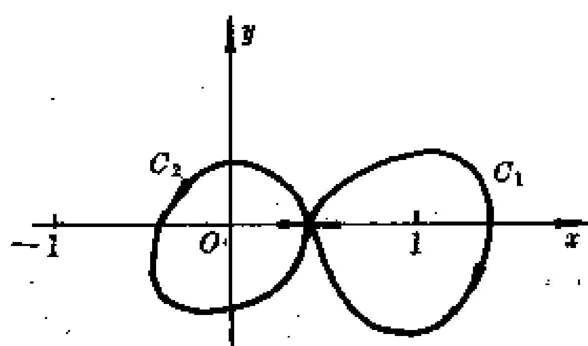


图 10

8. 三角函数 由(4.1), 对任何实数 x,

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x,\ e^{-ix}=\cos x-i\sin x,$$

于是

$$\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2},\ \sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}.$$

因此对任何复数 z, 我们定义余弦函数及正弦函数如下:

$$\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2},\ \sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}, \tag{8.1}$$

由此可见，对任何复数z,欧拉公式仍然成立:

$$e^{iz}=\cos z+i\sin z. \tag{8.2}$$

由(8.1)、(4.3)以及复合函数的导数公式，可见$\cos z$及$\sin z$都在复平面上解析，并且

$$\frac{d}{dz}\cos z=-\sin z,\ \frac{d}{dz}\sin z=\cos z. \tag{8.3}$$

复变余弦及复变正弦函数有许多与实变余弦及实变正弦函数相类似的性质，现举例如下:

(1) $\cos z$ 是偶函数，$\sin z$ 是奇函数:

$$\cos(-z)=\cos z,\ \sin(-z)=-\sin z.$$

(2) $\cos z$ 及 $\sin z$ 都有周期 2π:

$$\cos(z+2k\pi)=\cos z,\ \sin(z+2k\pi)=\sin z,$$

其中k是任何整数.

(3) $\cos(z_1+z_2)=\cos z_1\cos z_2-\sin z_1\sin z_2$,

$\sin(z_1+z_2)=\sin z_1\cos z_2+\cos z_1\sin z_2$.

(4) $\cos^2 z+\sin^2 z=1$.

以上各性质都可由(8.1)推出，请读者自己作出证明.

在这里要着重指出，由性质(4)不能推出$|\cos z|\leqslant 1$及$|\sin z|\leqslant 1$，因为一般说来，$\cos^2 z$及$\sin^2 z$不是非负的实数．例如当$z=2i$时，上两个不等式就不成立.

最后，让我们来确定复平面上使$\sin z$和$\cos z$为零的所有点.由(8.1)，等式$\sin z=0$相当于方程$e^{iz}=e^{-iz}$. 由关于指数函数的结果，可见$z=-z+2k\pi$, 其中$k\in\mathbb{Z}$,从而$z=k\pi$. 于是使$\sin z$为零的所有点是$z=k\pi$, 其中$k\in\mathbb{Z}$. 不难推得使$\cos z$为零的所有点是$z=\frac{\pi}{2}+k\pi$, 其中 $k\in\mathbb{Z}$.

引进了函数$\sin z$及$\cos z$的定义，我们就可以定义并且研究其他复变三角函数:

$$\operatorname{tg} z=\frac{\sin z}{\cos z},\ \operatorname{ctg} z=\frac{\cos z}{\sin z},\ \sec z=\frac{1}{\cos z},\ \csc z=\frac{1}{\sin z}.$$

这些函数在一定的区域内解析，而且它们也与相应的实变三角函数有类似的性质．在这里不打算对它们进行详细的讨论．

本节中我们看到，在复域中，指数函数是对数函数、幂函数和三角函数的共同基础．反三角函数可由对数函数表示出来，它们也以指数函数作为基础．现以反正切函数为例来说明这一点．

由函数 $z=\mathrm{tg}w$ 所定义的函数 w 称为 z 的反正切函数，记作

$$w=\mathrm{Arc\ tg}\ z. \tag{8.4}$$

由于

$$z=\frac{1}{i}\frac{e^{iw}-e^{-iw}}{e^{iw}+e^{-iw}},$$

令 $e^{2iw}=\tau$，就得到

$$z=\frac{1}{i}\frac{\tau-1}{\tau+1},$$

从而

$$\tau=\frac{-z+i}{z+i}.$$

最后得

$$\begin{aligned} w=\mathrm{Arctg}z&=\frac{1}{2i}\mathrm{Ln}\frac{-z+i}{z+i}\\ &=\frac{1}{2i}[\mathrm{Ln}(z-i)-\mathrm{Ln}(z+i)+i\pi]. \end{aligned} \tag{8.5}$$

假设确定 $\mathrm{Ln}(z-i)$ 及 $\mathrm{Ln}(z+i)$在某一点 $z(\neq\pm i)$的值是 $\ln(z-i)$及 $\ln(z+i)$．w 的相应值是

$$w=\mathrm{arctg}z=\frac{1}{2i}[\ln(z-i)-\ln(z+i)+i\pi].$$

于是 w 在点 z 的其他值是

$$w=\frac{1}{2i}[\ln(z-i)+2k_1\pi i-\ln(z+i)-2k_2\pi i+\pi i]$$

$$(k_1, k_2 \in \mathbb{Z}),$$

亦即

$$\operatorname{Arc\,tg} z = \operatorname{arc\,tg} z + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}). \tag{8.6}$$

这一性质与实域中反正切函数的性质相类似.

因为 $\operatorname{Ln}(z-i)$ 及 $\operatorname{Ln}(z+i)$ 都是多值解析函数，所以由(8.5)，$\operatorname{Arc\,tg} z$ 也是多值解析函数，其可能的枝点是 $z=\pm i$ 及 $z=\infty$. 不难看出，$z=\pm i$ 是 w 的(无穷阶)枝点. 现证明 $z=\infty$ 不是它的枝点.

由(8.5)，

$$\operatorname{Arc\,tg} z = \frac{1}{2i}\left[\ln|z-i| + i\operatorname{Arg}(z-i)\right.$$
$$\left. - \ln|z+i| - i\operatorname{Arg}(z+i) + i\pi\right].$$

任作一条简单连续曲线 C，使其内区域含 i 及 $-i$ (图 11).设 z_1 是 C 上一点，取定 $\operatorname{Arg}(z-i)$ 及 $\operatorname{Arg}(z+i)$ 在 z_1 的值为

$$\arg(z_1-i) \text{及}$$
$$\arg(z_1+i);$$

那么 w 的相应值为

$$w_1 = \operatorname{arc\,tg} z_1 = \frac{1}{2i}\left[\ln|z_1-i|\right.$$
$$+ i\arg(z_1-i) - \ln|z_1+i|$$
$$\left. - i\arg(z_1+i) + i\pi\right].$$

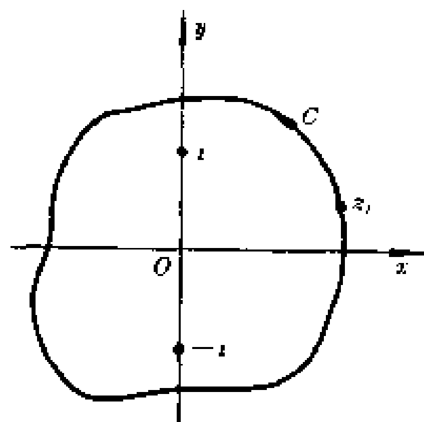


图 11

当一点 z 从 z_1 出发按反时针方向连续变动回到 z_1 时，通过连续变动，$\arg(z_1-i)$ 及 $\arg(z+i)$ 都增加了 2π，从而 w_1 变回到

$$\frac{1}{2i}\left[\ln|z_1-i| + i\arg(z_1-i) + 2\pi i - \ln|z+i| - i\arg(z+i)\right.$$
$$\left. - 2\pi i + i\pi\right] = w_1 .$$

由此可见，$z=\infty$不是 $\operatorname{Arc}\operatorname{tg} z$ 的枝点.

在复平面上取线段 $x=0, |y|\leqslant 1$ 作为割线，或者取两半射线 $x=0, |y|\geqslant 1$ 作为割线，在所得区域内，可把函数 w 分成解析分枝.

由(8.5)，$w=\operatorname{Arc}\operatorname{tg} z$ 的任何解析分枝有导数

$$\frac{dw}{dz}=\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{z-i}-\frac{1}{z+i}\right)=\frac{1}{1+z^2}.$$

三角函数及反三角函数的映射性质比较复杂，这里不进行讨论.

习 题 二

1. 试问函数 $\frac{1}{1+z^2}$ 在圆盘 $|z|<1$ (称为单位圆盘)内是否连续？是否一致连续？

2. 证明函数 $f(z)=|z|^2$ 除去在 $z=0$ 外，处处不可微.

3. 设函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析. 证明：如果对每一点 $z\in D$，有

$$f'(z)=0,$$

那么 $f(z)$ 在 D 内为常数.

4. 设函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析，证明：如果 $f(z)$ 满足下列条件之一，那么它在 D 内为常数：

(1) $\operatorname{Re}f(z)$ 或 $\operatorname{Im}f(z)$ 在 D 内为常数；

(2) $|f(z)|$ 在 D 内为常数.

5. 证明：若函数 $f(z)$ 在上半平面解析，那么函数 $\overline{f(\bar{z})}$ 在下半平面解析.

6. 试利用柯西－黎曼条件，证明下列函数在复平面上解析：

$$z^2, e^z, \sin z, \cos z;$$

而下列函数不解析：

$$\bar{z}^2, e^{\bar{z}}, \sin\bar{z}, \cos\bar{z}.$$

7. 证明在极坐标下的柯西－黎曼条件是：

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta}, \quad \frac{\partial u}{\partial\theta}=-r\frac{\partial v}{\partial r}.$$

8. 下章将要证明：在任何区域 D 内的解析函数 $f(z)$ 一定有任意阶导数. 由此证明:

(1) $f(z)$ 的实部和虚部在 D 内也有任意阶导数，并且满足拉普拉斯方程[①]：

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 .$$

(2) 在 D 内,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)|f(z)|^2 = 4|f'(z)|^2 .$$

9. 试求出 e^{2+i}, $\mathrm{Ln}(1+i)$, i^i, $1^{\sqrt{2}}$, $(-2)^{\sqrt{2}}$ 的值.

10. 由 $z=\sin w$ 及 $z=\cos w$ 所定义的函数 w 分别称为 z 的反正弦函数及反余弦函数. 求出它们的解析表达式(利用对数函数).

11. 由

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \quad 及 \quad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

所定义的函数分别称为双曲正弦函数及双曲余弦函数[②]. 证明

$$\sinh z = -i\sin iz, \cosh z = \cos iz .$$

由此从关于三角函数的有关公式导出:

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1 ,$$

$$\sinh(z_1+z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 + \cosh z_1 \sinh z_2 ,$$

$$\cosh(z_1+z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_1 \sinh z_2 ,$$

$$\sin(x+iy) = \sin x \cosh y + i\cos x \sinh y ,$$

$$\cos(x+iy) = \cos x \cosh y - i\sin x \sinh y ,$$

$$\frac{d}{dz}\sinh z = \cosh z, \quad \frac{d}{dz}\cosh z = \sinh z .$$

12. 设两个实变数的函数 $u(x,y)$ 有偏导数. 这一函数可以写成 $z=x+iy$ 及 $\bar{z}$ 的函数

$$u = u\left(\frac{z+\bar{z}}{2}, \frac{z-\bar{z}}{2i}\right).$$

---

① 这种方程的解称为调和函数. 因此解析函数的实部和虚部都是调和函数. 参看第八章.

② 它们也可记作 sh$z$ 及 ch$z$.

证明：

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}\right),\ \frac{\partial u}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

设复变函数 $f(z)$的实部及虚部分别是 $u(x,y)$ 及 $v(x,y)$，并且它们都有偏导数，求证：对于$f(z)$，柯西 - 黎曼条件可以写成

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=\frac{\partial u}{\partial \bar{z}}+i\frac{\partial v}{\partial \bar{z}}=0.$$

13. 设函数 $f\left(\frac{1}{z}\right)$在 $z=0$ 解析，那么我们说$f(z)$ 在 $z=\infty$ 解析．下列函数中，哪些在无穷远点解析？

$$e^{z},\ \mathrm{Ln}\left(\frac{z+1}{z-1}\right),\ \frac{a_0+a_1z+\cdots+a_mz^m}{b_0+b_1z+\cdots+b_nz^n},$$

$$\frac{\sqrt{z}}{1+\sqrt{z}}.$$

14. 在复平面上取上半虚轴作割线．试在所得区域内分别取定函数 $\sqrt{z}$ 与 $\mathrm{Ln}z$ 在正实轴取正实值的一个解析分枝，并求它们在上半虚轴左沿的点及右沿的点 $z=i$ 处的值．

15. 在复平面上取正实轴作割线．试在所得的区域内：(1)取定函数 z^{α} $(-1<\alpha<0)$在正实轴上沿取正实值的一个解析分枝，并求这一分枝在

$$z=-1$$

处的值；在正实轴下沿的值．(2)取定函数 $\mathrm{Ln}z$ 在正实轴上沿取实值的一个解析分枝，并求这一分枝在 $z=-1$ 处的值；在正实轴下沿的值．

16. 求函数 $\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}$ $(0<k<1)$的枝点．证明它在线段

$$-\frac{1}{k}\leqslant x\leqslant -1,\quad 1\leqslant x\leqslant \frac{1}{k}$$

的外部，能分成解析分枝，并求在 $z=0$ 取正值的那个分枝．

17. 研究函数

$$w=\sqrt[3]{\frac{(z+1)(z-1)(z-2)}{z}}.$$

如果规定在 $z=3$ 时，$w>0$. 任作两种适当割线，求这函数的两个不同的相应解析分枝在 $z=i$ 的值.

18. 找出下列推理的错误：因为 $(-z)^2=z^2$，所以 $2\text{Ln}(-z)=2\text{Ln}z$. 因此 $\text{Ln}(-z)=\text{Ln}z$.

第三章 复变函数的积分

§1. 柯西定理

1. 复变函数的积分 柯西(1825年)研究复变函数的积分，证明了著名的柯西定理；它是复变函数论的重要基础之一．本章先讲述这一定理的经典形式以及由它推导出来的解析函数的重要性质，然后讲述同调及同伦形式的柯西定理．现在先引进复变函数的积分．

设在复平面 $\mathbb{C}$ 上有一条连接 z_0 及 Z 两点的简单曲线(即简单光滑或简单分段光滑曲线；请参看 1.5 中的规定) C. 设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 是在 C 上的连续函数，在这里 $u(x,y)$ 及 $v(x,y)$ 是 $f(z)$ 的实部及虚部．把曲线 C 用分点 $z_0, z_1, z_2, \cdots, z_{n-1}, z_n=Z$ 分成 n 个更小的弧，在这里分点 $z_k(k=0,1,\cdots,n)$ 是在曲线 C 上按照从 z_0 到 Z 的次序排列的．如果 ζ_k 是在 z_k 到 z_{k+1} 的弧上的任一点(图 12)，那么和式

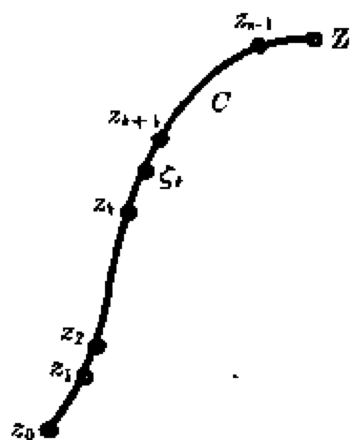


图 12

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k)(z_{k+1}-z_k) \quad (1.1)$$

可以写成

$$\sum_{k=0}^{n-1}[u(\xi_k,\eta_k)+iv(\xi_k,\eta_k)][(x_{k+1}-x_k)+i(y_{k+1}-y_k)],$$

或者

$$\sum_{k=0}^{n-1} u(\xi_k,\eta_k)(x_{k+1}-x_k)-\sum_{k=0}^{n-1} v(\xi_k,\eta_k)(y_{k+1}-y_k)$$

$$+i\left[\sum_{k=0}^{n-1} v(\xi_k,\eta_k)(x_{k+1}-x_k)+\sum_{k=0}^{n-1} u(\xi_k,\eta_k)(y_{k+1}-y_k)\right], \tag{1.2}$$

在这里 x_k, y_k 与 ξ_k, η_k 分别表示 z_k 与 ζ_k 的实部及虚部.

按照关于实变函数的线积分的结果，当曲线 C 上的分点 z_k 的个数无穷增加，而且 $|z_{k+1}-z_k|=\sqrt{(x_{k+1}-x_k)^2+(y_{k+1}-y_k)^2}$ 之中的最大的一个趋近于零时，(1.2)中的四个和式分别有极限：

$$\int_C u(x,y)dx,\ \int_C v(x,y)dy,\ \int_C v(x,y)dx,\ \int_C u(x,y)dy.$$

我们说：当曲线 C 上的分点 z_k 的个数无穷增加，而且 $|z_{k+1}-z_k|$ $(k=0,1,2,\cdots,n-1)$ 之中最大的一个趋近于零时，和式(1.1)有极限

$$\int_C u(x,y)dx-v(x,y)dy+i\int_C v(x,y)dx+u(x,y)dy,$$

这一极限称为$f(z)$沿曲线 C 的积分，记作

$$\int_C f(z)dz.$$

于是我们有

$$\int_C f(z)dz=\int_C u(x,y)dx-v(x,y)dy+i\int_C v(x,y)dx+u(x,y)dy. \tag{1.3}$$

如果 C 是简单光滑曲线：$x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)(t_0\leqslant t\leqslant T)$，并且 t_0 及 T 相应于 z_0 及 Z，那么(1.3)右边的积分可以写成黎曼

积分的形式，例如其中第一个可以写成

$$\int_{t_0}^{T} u(\varphi,\psi)\varphi'(t)dt.$$

把(1.3)右边的积分都改写成类似的形式，并且重新集合各项，就得到

$$\int_C f(z)dz=\int_{t_0}^{T}[u(\varphi,\psi)+iv(\varphi,\psi)][\varphi'(t)+i\psi'(t)]dt. \quad (1.4)$$

我们可以看到，在(1.4)的左边，把 z 换成

$$z(t)=\varphi(t)+i\psi(t),$$

把 dz 形式地换成微分 $dx+idy=[\varphi'(t)+i\psi'(t)]dt$，就直接得到(1.4)的右边．这样，(1.4)也可写成

$$\int_C f(z)dz=\int_{t_0}^{T} f(z(t))z'(t)dt. \quad (1.4')$$

当 C 是分段光滑简单曲线时，我们把它分成几段弧来考虑，仍然可以得到类似的结果．

根据复变函数的积分的定义，可以立即推出它的一些基本性质．设 $f(z)$ 及 $g(z)$ 在简单曲线 C 上连续，那么有：

(1) $\int_C \alpha f(z)dz=\alpha\int_C f(z)dz$，其中 α 是一复常数．

(2) $\int_C [f(z)+g(z)]dz=\int_C f(z)dz+\int_C g(z)dz$．

(3) $\int_C f(z)dz=\int_{C_1} f(z)dz+\int_{C_2} f(z)dz+\cdots+\int_{C_n} f(z)dz$，其中曲线 C 是由曲线 $C_1, C_2, \cdots$ 及 C_n 连接而成．

(4) $\int_{C^-} f(z)dz = -\int_C f(z)dz$，其中如果曲线 C 用方程 $z = z(t)(t_0 \leqslant t \leqslant T)$表出，那么曲线 C^- 就由 $z = z(-t)(-T \leqslant t \leqslant -t_0)$ 表出．换句话说，有关积分是在同一曲线上沿相反的方向取的．

如果 C 是一条简单闭曲线，那么可取 C 上任一点作为取积分的起点，而且当沿 C 取积分的方向改变时，所得积分相应变号．

(5) 如果在 C 上，$|f(z)| \leqslant M$，而 L 是曲线 C 的长，其中 M 及 L 都是有限的正数，那么

$$\left|\int_C f(z)dz\right| \leqslant ML\text{[1]} .$$

这个不等式我们要经常用到．它是由下面的不等式取极限得到的：

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k)(z_{k+1} - z_k)\right| \leqslant M\sum_{k=0}^{n-1} |z_{k+1} - z_k| \leqslant ML .$$

上述积分的定义及性质对于不一定是简单的一般曲线，即一般光滑或分段光滑曲线也适用．

例 1 设 C 是连接 z_0 及 Z 两点的简单曲线，那么

$$\int_C dz = Z - z_0 . \tag{1.5}$$

$$\int_C zdz = \frac{1}{2}(Z^2 - z_0^2). \tag{1.6}$$

在(1.3)中分别取 $f(z) = 1$ 以及 $f(z) = z = x + iy$，我们就得

---

[1] 我们也可证明

$$\left|\int_C f(z)dz\right| \leqslant \int_C |f(z)|ds = \int_C |f(z)||dz| ,$$

在这里 ds 或 $|dz|$ 表示曲线 C 上弧长的微分．

到(1.5)及(1.6).

如果 C 是闭曲线，即 $z_0=Z$，那么(1.5)及(1.6)中的积分都是零.

例 2 设 C 是一个圆 $|z-\alpha|=\rho$，其中 α 是一复数，ρ 是一正数，那么按反时针方向所取的积分

$$\int_C \frac{dz}{z-\alpha}=2\pi i. \tag{1.7}$$

令

$$z-\alpha=\rho e^{i\theta},$$

于是

$$dz=\rho ie^{i\theta}\,d\theta,$$

从而

$$\int_C \frac{dz}{z-\alpha}=\int_0^{2\pi} id\theta=2\pi i.$$

2. 几个引理 根据连续函数 $f(z)$ 的积分的定义，一般说来，这种积分的数值不仅依赖于函数，而且依赖于所取的曲线 C. 设 $f(z)$ 在区域 D 内连续，那么，当我们在区域 D 内取两条不同的简单曲线 C 及 C_1 连接两点 z_0 及 Z 时，积分 $\int_C f(z)dz$ 及 $\int_C f(z)dz$ 的数值一般不同. 可是在上段例 1 中的积分，无论取在连接 z_0 及 Z 的哪一条简单曲线上，所得数值总是相同. 因此很自然地提出下列问题：函数 $f(z)$ 应当满足怎样的条件，才能使它的积分也具有这一性质？与实变函数的线积分的情形一样，和这个问题相联系的是：找出 $f(z)$ 沿任一条简单闭曲线的积分为零的条件. 柯西定理回答了这一问题. 现在先证明几个引理.

引理 2.1 设 $f(z)$ 是在单连通区域 D 内的解析函数. 设 C 是 D 内一个多角形的周界，那么

$$\int_C f(z)dz=0, \tag{2.1}$$

在这里沿 C 的积分是按反时针方向取的[①].

证 先对 C 是三角形周界的情形作出证明，然后证明一般情形.

(1) C 为一三角形的周界 $\triangle$

设

$$\left|\int_{\triangle} f(z)dz\right| = M ,$$

我们来证明 $M=0$.

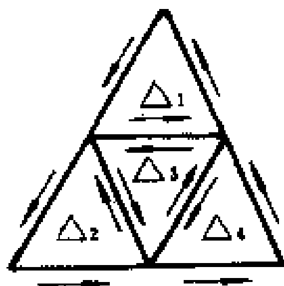


图 13

等分给定的三角形的每一边，两两连接这些分点，给定的三角形被分成了四个全等的三角形，它们的周界分别是$\triangle_1$,$\triangle_2$,$\triangle_3$,$\triangle_4$(图 13). 我们显然有

$$\int_{\triangle} f(z)dz = \int_{\triangle_1} + \int_{\triangle_2} + \int_{\triangle_3} + \int_{\triangle 4} ; \qquad (2.2)$$

这是由于在每一条连接分点的线段上，积分恰好按相反的方向取了两次，因而互相抵消. 根据(2.2)，沿着周界$\triangle_k (k=1, 2, 3, 4)$中至少有一个所取的积分的模不小于$\frac{M}{4}$. 比如说，假定这个周界是$\triangle_1$:

$$\left|\int_{\triangle_1} f(z)dz\right| \geqslant \frac{M}{4} .$$

对于这个三角形周界$\triangle_1$, 和前面一样，把它分成四个全等三角形，其中一个的周界$\triangle^{(2)}$满足

$$\left|\int_{\triangle^{(2)}} f(z)dz\right| \geqslant \frac{M}{4^2} .$$

把这种作法无限制地继续下去. 于是我们得到具有周界:

---

① 由上段中积分的性质(4)，在这里按顺时针方向取积分，结果也是一样.

$\triangle=\triangle^{(0)}$, $\triangle_1=\triangle^{(1)}$, $\triangle^{(2)}$, $\triangle^{(3)}$, $\cdots$, $\triangle^{(n)}$, $\cdots$ 的一个三角形序列，其中每一个包含后面一个，而且有下列不等式：

$$\left|\int_{\triangle^{(n)}} f(z)dz\right| \geqslant \frac{M}{4^n} \quad (n=0,1,2,\cdots). \tag{2.3}$$

用 U 表示周界$\triangle$的长度，于是周界$\triangle^{(n)}$的长度是 $\frac{U}{2^n}$ $(n=1, 2, \cdots)$. 现估计$\int_{\triangle^{(n)}} f(z)dz$ 的模. 由于三角形序列中每一个包含它后面的全部三角形，而且 $\frac{U}{2^n} \to 0(n \to +\infty)$，可见存在着一点 z_0 属于序列中所有三角形①. 又因$f(z)$在 z_0 有导数$f'(z_0)$，所以任给 $\varepsilon>0$，可找到 $\delta>0$，使得当 $z\in G$ 并且 $|z-z_0|<\delta$ 时，

$$\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}-f'(z_0)\right|<\varepsilon,$$

亦即

$$|f(z)-f(z_0)-(z-z_0)f'(z_0)|<\varepsilon|z-z_0|. \tag{2.4}$$

显然，当 n 充分大时，$\triangle^{(n)}$ 包含在 $|z-z_0|<\delta$ 所确定的圆盘内. 因此当 $z\in\triangle^{(n)}$时，(2.4)成立，而且这时 $|z-z_0|<\frac{U}{2^n}$，从而

$$|f(z)-f(z_0)-(z-z_0)f'(z_0)|<\frac{U}{2^n}\varepsilon.$$

其次，由于$\int_{\triangle^{(n)}} dz=0$，$\int_{\triangle^{(n)}} zdz=0$（第1段例1），我们有

$$\int_{\triangle^{(n)}} f(z)dz=\int_{\triangle^{(n)}}\left[f(z)-f(z_0)-(z-z_0)f'(z_0)\right]dz.$$

① 证法与数学分析中闭矩形套定理相仿.

于是当 n 充分大时，

$$\left|\int_{\triangle^{(n)}} f(z)dz\right| = \left|\int_{\triangle^{(n)}} [f(z)-f(z_0)-(z-z_0)f'(z_0)]dz\right|$$

$$< \frac{U}{2^n}\cdot\frac{U}{2^n}\varepsilon = \varepsilon\cdot\frac{U^2}{4^n} . \tag{2.5}$$

比较(2.3)及(2.5)，我们有

$$\frac{M}{4^n} < \varepsilon\cdot\frac{U^2}{4^n} ,$$

或即

$$M < \varepsilon U^2 .$$

由于ε 可取为任意正数，可见 $M=0$.

(2) **C 为一多角形的周界 P** 用对角线把以P 为周界的多角形分成几个三角形(图 14)[①]，就可把沿 P 的积分表为沿这些三角形周界的积分之和：

$$\int_P f(z)dz = \int_{ABCA} + \int_{ACDA} + \int_{ADEA}$$

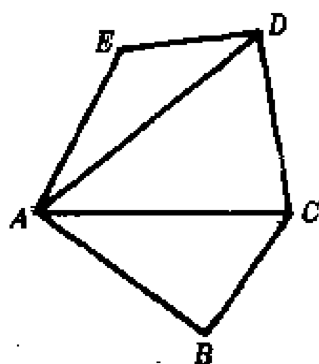


图 14

因为这时在每一条对角线上，积分沿彼此相反的方向取了两次，所以恰好相互抵消. 于是由(1)中三角形周界情况，可得

$$\int_P f(z)dz = 0 . \tag{2.6}$$

引理 2.1 证完.

设 P 是 D 中任一条闭合折线，其各段可能彼此相交，由(2)中多角形的周界的情况，这时仍然有(2.6).

---

① 参看马库雪维奇著，黄正中等译，解析函数论，140—142页，高等教育出版社，1957年版.

现在引进不定积分或原函数的定义. 设$f(z)$及$\Phi(z)$是区域D内确定的函数, $\Phi(z)$是D内的解析函数, 并且在D内有$\Phi'(z)=f(z)$, 那么函数$\Phi(z)$称为$f(z)$在区域D内的一个不定积分或原函数; 除去可能相差一个常数外, 原函数是唯一确定的. 这就是说, $f(z)$的任意两个不定积分或原函数的差是一常数. 事实上, 设$\Phi(z)$及$F(z)$都是$f(z)$在D内的原函数. 我们有

$$[\Phi(z)-F(z)]'=\psi'(z)=0,$$

在这里$\psi(z)=\Phi(z)-F(z)$. 于是根据第二章习题二第3题, 可见在D内,

$$\psi(z)=\alpha,$$

亦即$\Phi(z)=F(z)+\alpha$, 这里α是一常数.

设$f(z)$在区域D内解析, 那么是否可以断言$f(z)$在D内有原函数? 对于某些区域D, 例如凸区域D, 这一问题的答案是肯定的. 所谓凸区域D就是满足下列条件的区域: 连接D中任意两点的线段也包含在D内. 这就是说,

$$\forall\alpha\in D, \forall\beta\in D\Rightarrow\{(1-t)\alpha+t\beta|t\in[0,1]\}\subset D.$$

我们有:

引理 2.2 设$f(z)$是在凸区域D内的解析函数, 那么$f(z)$在D内有原函数.

证 取定$\alpha\in D$. 任取$z\in D$, 那么连接α及z的线段必然包含在D内. 令

$$F(z)=\int_0^1 f[(1-t)\alpha+tz]dt,$$

记作$\int_\alpha^z f(\zeta)d\zeta$. 于是$F(z)$是在$D$内确定的一个函数.

现证明F是f在D内的一个原函数. 取$z_0\in D$, 那么连接z_0及z的线段也包含在D内. 考虑顶点是α, z_0及z的三角形, 由引理 2.1,

$$F(z)-F(z_0)=\int_\alpha^z f(\zeta)d\zeta-\int_\alpha^{z_0} f(\zeta)d\zeta=\int_{z_0}^z f(\zeta)d\zeta,$$

其中

$$\int_{z_0}^z f(z)dz=\int_0^1 f[(1-t)z_0+tz]dt.$$

由上段例 1,

$$F(z)-F(z_0)-(z-z_0)f(z_0)=\int_{z_0}^z [f(\zeta)-f(z_0)]d\zeta.$$

由于$f(z)$在 z_0 连续, $\forall \varepsilon>0$, $\exists\ \delta>0$, 使得

$$\forall z\ \in\{z\,||z-z_0|<\delta\}\cap D, |f(z)-f(z_0)|<\varepsilon.$$

于是

$$F(z)-F(z_0)-(z-z_0)f(z_0)=0(|z-z_0|)\ (|z-z_0|\to 0),$$

从而 $\exists F'(z_0)=f(z_0)$. 证完.

如果在某一区域内连续的复变函数有原函数, 那么它沿这区域内曲线的积分可以用原函数计算出来, 与实变函数积分的情形相类似:

引理2.3 设$f(z)$是在区域 D 内的连续函数, 并且在 D 内有原函数 $F(z)$. 如果α 及 $\beta\in D$, 并且 C 是 D 内连接 α 及 β 的一条曲线[1], 那么

$$\int_C f(z)dz=F(\beta)-F(\alpha).\tag{2.7}$$

从这引理可以看出, 上列积分的值只与曲线 C 的起点和终点有关, 而与曲线 C 本身无关.

证 如果曲线 C 是光滑曲线 $z=z(t)\,(a\leqslant t\leqslant b)$, $z(a)=\alpha$, $z(b)=\beta$, 那么由(1.4′),

[1] 参看第一章, 第 5 段中的规定.

$$\int_C f(z)dz = \int_a^b F'(z(t))z'(t)dt.$$

因为 $\frac{d}{dt}F(z(t)) = F'(z(t))z'(t)$，并且因为微积分基本定理对实变数复数值函数显然成立，所以

$$\int_C f(z)\cdot dz = F(z(t))\Big|_a^b = F(z(b)) - F(z(a))$$

$$= F(\beta) - F(\alpha).$$

如果曲线 C 是一条分段光滑曲线，那么把积分分成几段计算，然后求和，仍然可以得到(2.7).

复变函数的曲线积分以及各种形式的柯西定理可以推广到较为一般的曲线情形.

3. 柯西定理 现在可以证明柯西定理，它是下列定理中的第一部分.

定理 3.1 设$f(z)$是单连通区域 D 内的解析函数.

(1) 设 C 是 D 内任一条简单闭曲线，那么

$$\int_C f(z)dz = 0, \tag{3.1}$$

在这里沿 C 的积分是按反时针方向取的[①].

(2) 设 C 是在 D 内连接 z_0 及 z 两点的任一条简单曲线，那么沿 C 从 z_0 到 z 的积分的值只有 z_0 及 z 所决定，而不依赖于曲线 C；这积分也可记作

$$\int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta.$$

证 先证(1). 在 C 上任取一点 ζ^*，可以作出圆盘$K_0 = \{z \| z$

① 在这里按顺时针方向取积分，结果也是一样.

$-\zeta^*|<\delta_0\}\subset D(\delta_0>0)$. 因圆盘是凸区域. 由引理 2.2, $f(z)$在K_0内有原函数 $F_0(z)$.

由于 C 是一个紧集, 可以找到有限个圆盘覆盖 C; 把它们按反时针方向依次排列为 $K_1, K_2, \cdots, K_{n-1}$, 并且用 $F_1(z)$, $F_2(z)$, $\cdots, F_{n-1}(z)$表示 $f(z)$在这些圆盘中的原函数. 取 $\zeta_1\in C\cap K_1$, $\zeta_2\in C\cap K_1\cap K_2$, $\zeta_3=C\cap K_2\cap K_3$, $\cdots$, $\zeta_{n-1}\in C\cap K_{n-2}\cap K_{n-1}$, $\zeta_n\in C\cap K_{n-1}\cap K_1$, 这里 $\zeta_1, \cdots, \zeta_n, \zeta_1$ 是在 C 上依序按反时针方向取的. 于是由引理 2.3, 我们有

$$\int_C f(z)dz=\sum_{k=1}^{n}\int_{\widehat{\zeta_k\zeta_{k+1}}} f(\zeta)d\zeta$$

$$=\sum_{k=1}^{n}[F_k(\zeta_{k+1})-F_k(\zeta_k)] \quad (F_n=F_1, \zeta_{n+1}=\zeta_1),$$

这里 $\int_{\widehat{\zeta_k\zeta_{k+1}}}$ 表示沿 C 从 ζ_k 到 ζ_{k+1} 的弧上的积分. 用 $\int_{\overline{\zeta_k\zeta_{k+1}}}$ 表示沿从ζ_k 到 ζ_{k+1} 的线段上的积分, 又由引理 2.3, 有

$$\int_C f(z)dz=\sum_{k=1}^{n}\int_{\overline{\zeta_k\zeta_{k+1}}} f(\zeta)d\zeta.$$

因为$\overline{\zeta_k\zeta_{k+1}}$ $(k=1,2,\cdots,n)$构成 D 中一条闭合折线, 所以由引理 2.1 后面的说明, 我们立即得到 (3.1)

现证(2). 设 C_1 是 D 内连接 z_0 及 z 两点的另一条简单曲线. 同(1)的证明, 可在 D 内作出连接 z_0 及 z、并与 C 及 C_1 分别内接的两条折线 C^* 及 C_1^*, 使得

$$\int_C f(\zeta)d\zeta=\int_{C^*} f(\zeta)d\zeta,\quad \int_{C_1} f(\zeta)d\zeta=\int_{C_1^*} f(\zeta)d\zeta.$$

由引理 2.1 后面的说明,

$$\int_{C^*} f(\zeta)d\zeta=\int_{C_1^*} f(\zeta)d\zeta \quad .$$

于是(2)得证.

定理 3.1(1)也可叙述为:

定理 3.1′ 设 C 是一条简单闭曲线. 设 $f(z)$在以 C 为边界的有界闭区域上解析, 那么我们有(3.1).

应用定理 3.1(2), 可以把引理 2.2 推广为:

定理 3.2 设 $f(z)$是在单连通区域 D 内的解析函数, 那么 $f(z)$在 D 内有原函数.

证 取定 $\alpha\in D$. 任取 $z\in D$. 由定理 3.1(2),

$$F(z)=\int_{\alpha}^{z} f(\zeta)d\zeta$$

是在 D 内确定的一个函数. 取 $z_0\in D$, 并取 $z\in D$与 z_0充分接近. 把

$$F(z)-F(z_0)=\int_{\alpha}^{z} f(\zeta)d\zeta-\int_{z}^{z_0} f(\zeta)d\zeta$$

中两个积分看作是沿两条简单曲线取的, 而其中一条曲线是另一条曲线与连接 z_0 及 z 的线段的并集. 于是有

$$F(z)-F(z_0)-(z-z_0)f(z_0)=\int_{z_0}^{z}[f(\zeta)-f(z_0)]d\zeta,$$

这里积分是沿 z_0 及 z 的联线取的. 与引理 2.2 的证明中一样, 可得ヨ $F'(z_0)=f(z_0)$. 证完.

结合定理 3.2 及引理 2.3, 可以见到可用原函数求解析函数的积分, 但是应当注意到只是对单连通区域证明了这一结果.

例 1 设D 是不含 α 的一个单连通区域, 并且 z_0及 $z\in D$, 那么

$$\int_{z_0}^{z}\frac{d\zeta}{(\zeta-\alpha)^m}=\frac{1}{1-m}\left[\frac{1}{(z-\alpha)^{m-1}}-\frac{1}{(z_0-\alpha)^{m-1}}\right],$$

其中 m 是不等于1的整数. 另外，还设 D 在复平面上沿从 α 出发的任何射线割开而得的区域内，我们有

$$\int_{z_0}^{z} \frac{d\zeta}{\zeta-\alpha} = \ln(z-\alpha) - \ln(z_0-\alpha),$$

其中对数应了解为 $\mathrm{Ln}(z-\alpha)$ 在 D 内的一个解析分枝在 z 及 z_0 的值. 以上两积分都是沿在 D 内连接 z_0 及 z 的任一条简单曲线取的.

柯西定理 3.1 可以直接推广到多连通区域的情形. 设有 $n+1$ 条简单闭曲线 $C_0, C_1, \cdots, C_n$; 曲线 $C_1, \cdots, C_n$ 中每一条都在其余曲线的外区域内，而且所有这些曲线都在 C_0 的内区域内，C_0 以及 $C_1, \cdots, C_n$ 围成一个有界多连通区域 D, D 及其边界构成一个闭区域 $\overline{D}$. 设 $f(z)$ 在 $\overline{D}$ 上解析，那么令 C 表示 D 的全部边界，我们有

$$\int_C f(z)dz = 0, \qquad (3.1)$$

在这里积分是沿 C 按关于区域 D 的正向取的. 这就是说，沿 C_0 按反时针方向，沿 $C_1, \cdots, C_n$ 按顺时针方向取积分，亦即当点沿着 C 按所选定取积分的方向运动时，区域 D 总在它的左侧(图 15). 为了表明求积分的方向，我们可把(3.1)写成

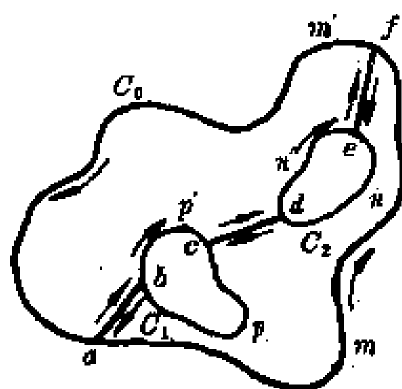


图 15

$$\int_C f(z)dz = \int_{C} f(z)dz + \int_{C_1^-} f(z)dz + \cdots + \int_{C_n^-} f(z)dz = 0. \quad (3.2)$$

以后我们写出的沿区域边界的积分，除了特别声明外，都是

按关于区域的正向取的.

为了证明(3.2)，把 $C_0, C_1, \cdots C_n$ 按照轮换的次序用在 $\overline{D}$ 上互不相交的补助简单曲线连接起来．这些曲线上除了端点外，其他点都不在 D 的边界上．如图 15，我们用线段 ab, cd, ef 把 C_0, C_1, C_2 连接起来．这时得到两个闭合曲线 γ :$amfendcpba$ 及 γ': $abp'cdn'efm'a$. 显然

$$\int_{\gamma} f(z)dz=0,\ \int_{\gamma'} f(z)dz=0 . \tag{3.3}$$

把这两等式相加，就得到(3.1)及(3.2)．这是因为在(3.3)中，沿 ab, cd 及 ef 上相反的方向各取了一次积分，而这样的积分在相加时相互抵消了．在一般情况下，可用同样的方法作出证明．

(3.2)显然又可写成

$$\int_{C_0} f(z)dz=\int_{C_1} f(z)dz+\cdots+\int_{C_n} f(z)dz , \tag{3.4}$$

这里有关积分都是沿反时针方向取的．

以后我们写出的沿简单闭曲线的积分，除特别声明外，都是按反时针方向取的.

现在考虑在多连通区域内的不定积分．设 $f(z)$ 在一个多连通区域 D(图 16)内解析．在 D 内作连接 z_0 及 z 的简单曲线．在某两条这样的曲线所围的闭区域上，$f(z)$ 可能不解析．这时不能应用柯西定理，而 $f(z)$ 沿这两条曲线的积分可能不相等．假定这两积分确不相等．那么函数

$$F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta \tag{3.5}$$

是多值的．

可是当 z 属于包含在 D 内的某一单连通区域 Δ 时，取曲线如下：从 z_0 沿一固定的简单曲线到 Δ 内一点 z_1，然后从 z_1 沿在 Δ

内任一条简单曲线到 z. 沿这种曲线取积分所得的函数 $F(z)$ 在 Δ 内解析. 改变从 z_0 到 z_1 的曲线, 我们就可能得到不同的解析函数; 它们是 $F(z)$ 在 Δ 内的不同的解析分枝.

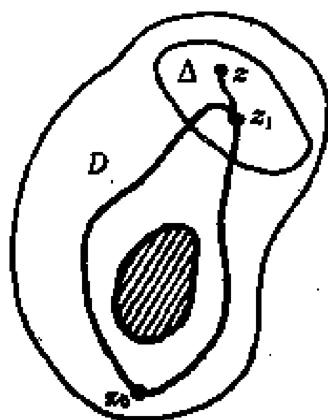


图 16

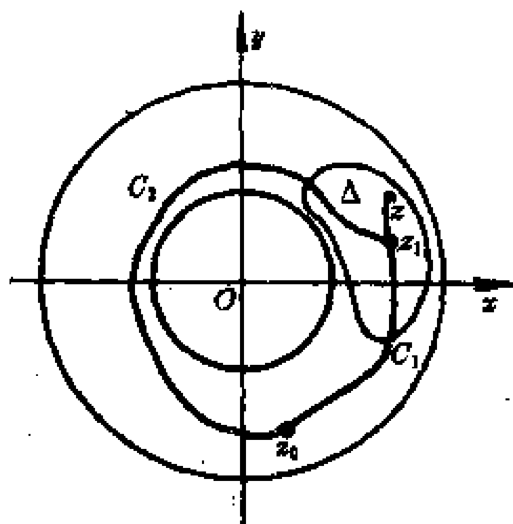


图 17

例 2 在圆环 $D: R_1<|z|<R_2(0<R_1<R_2<+\infty)$ 内, $f(z)=\frac{1}{z}$ 解析. 在 D 内取定两点 z_0 及 z_1. 作连接 z_0 及 z_1 的两条简单曲线 C_1 及 C_2, 如图 17. 取定 $\mathrm{Arg}\, z$ 在 z_0 的值为 $\arg z_0$. 当 z 沿 C_1 从 z_0 连续变动到 z_1 时, z 的辐角从 $\arg z_0$ 连续变动到 $\arg z_1$. 于是当 z 沿 C_2 从 z_0 连续变动到 z_1 时, z 的辐角从 $\arg z_0$ 连续变动到 $\arg z_1-2\pi$.

现求 $\frac{1}{\zeta}$ 沿 C_1 的积分. 令 $\zeta=\rho e^{i\theta}$. 则

$$d\zeta=e^{i\theta}d\rho+i\rho e^{i\theta}d\theta,$$

从而

$$\int_{C_1}\frac{d\zeta}{\zeta}=\int_{C_1}\frac{d\rho}{\rho}+i\int_{C_1}d\theta$$

$$=\ln|z_1|-\ln|z_0|+i(\arg z_1-\arg z_0)$$

$$=\ln z_1-\ln z_0 .$$

同样求得

$$\int_{C_2}\frac{d\zeta}{\zeta}=\ln z_1-\ln z_0-2\pi i .$$

这样，在含 z_1 的一个单连通区域 Δ(在 D 内)内，相应于 C_1 及 C_2, 多值函数

$$F(z)=\int_{z_0}^{z}\frac{d\zeta}{\zeta}$$

有两个不同的解析分枝

$$\int_{C_k}\frac{d\zeta}{\zeta}+\int_{z_1}^{z}\frac{d\zeta}{\zeta}=\ln z_1-\ln z_0+\int_{z_1}^{z}\frac{d\zeta}{\zeta}-2(k-1)\pi i$$

$$(k=1,2) .$$

相应于连接 z_0 及 z_1 的其他曲线，还可得到 $F(z)$在 D 内的其他解析分枝. $F(z)$就是对数函数.

§2. 柯 西 公 式

4. 柯西公式 设 $f(z)$在以圆 $C:|z-z_0|=\rho_0(0<\rho_0<+\infty)$为边界的闭圆盘上解析. 由柯西定理，$f(z)$ 沿 C 的积分为零. 考虑积分

$$I=\int_C\frac{f(z)}{z-z_0}\,dz, \tag{4.1}$$

由于被积函数在 C 上连续，积分 I 必然存在；但因 $\dfrac{f(z)}{z-z_0}$ 在上述闭圆盘上不是解析的，I 的值不一定为零. 例如由第 1 段例2，在 $f(z)\equiv 1$ 时，$I=2\pi i$.

现考虑$f(z)$为解析函数情况. 作以 z_0 为心、以$\rho(0<\rho<\rho_0)$为

半径的圆 C_ρ. 由(3.4),

$$\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz=\int_{C_\rho}\frac{f(z)}{z-z_0}\,dz. \tag{4.2}$$

上式对满足 $0<\rho<\rho_0$ 的任何 ρ 成立. 由此可见, I 的值只与 $f(z)$ 在 z_0 点邻近的值有关.

与第1段中例2一样, 令

$$z-z_0=\rho e^{i\theta}.$$

我们有

$$I=i\int_0^{2\pi} f(z_0+\rho e^{i\theta})d\theta.$$

由于 I 的值与 ρ 无关, 由 $f(z)$ 在 z_0 的连续性可推测到 $I=2\pi i f(z_0)$, 亦即

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz. \tag{4.3}$$

(4.3)是正确的, 现证明如下: 考虑(4.2)右边积分当 ρ 趋近于零时的情况. 我们有

$$\int_{C_\rho}\frac{f(z)}{z-z_0}\,dz=f(z_0)\int_{C_\rho}\frac{dz}{z-z_0}+\int_{C_\rho}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz. \tag{4.4}$$

由于 $f(z)$ 在 z_0 连续, 任给 $\varepsilon>0$, 可找到 $\delta>0(\delta\leqslant\rho_0)$, 使得当 $0<\rho<\delta, z\in C_\rho$ 时, $|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon$. 于是

$$\left|\int_{C_\rho}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{\rho}\cdot 2\pi\rho=2\pi\varepsilon.$$

因此当 ρ 趋近于0时, (4.4)的右边第二个积分趋近于零. 由第1段中例2, (4.4)中 $f(z_0)$ 的系数是 $2\pi i$. 由此结合(4.2), 就立即得到(4.3).

更一般地，利用柯西定理可以证明，对于在某些有界闭区域上的解析函数，它在区域内任一点所取的值可用它在边界上的值表示出来。所得表示式称为柯西公式；它表明了解析函数的一个基本性质。这一性质对于复变函数理论本身及其应用都非常重要。

定理 4.1 设 D 是以有限条简单闭曲线 C（图 18 中 C 为 C_0，C_1 及 C_2 所组成）**为边界的有界区域。设 $f(z)$ 在 D 及 C 所组成的闭区域 $\overline{D}$ 上解析，那么在 D 内任一点 z，**

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta. \qquad (4.5)$$



图 18

(4.5)称为**柯西公式**。

证 设 $z\in D$。显然，函数 $\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}$ 在满足 $\zeta\in\overline{D}$，$\zeta\neq z$ 的点 ζ 处解析。

以 z 为心作一包含在 D 内的闭圆盘，设其半径为 ρ，边界为圆 C_ρ。在 $\overline{D}$ 上，挖去以 C_ρ 为边界的圆盘，余下的点集是一闭区域 $\overline{D}_\rho$。在 $\overline{D}_\rho$ 上，ζ 的函数 $f(\zeta)$ 以及 $\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}$ 解析。根据(3.4)，

$$\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta=\int_{C_\rho}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta, \qquad (4.6)$$

在这里沿 C 的积分是按关于 D 的正向取的，沿 C_ρ 的积分是按反时针方向取的。

结合(4.6)及(4.3)，我们立即得到(4.5)。

由(4.5)形式地在积分号下求导数，可推测出下列结果。

定理 4.2 在定理4.1 的假设下，$f(z)$ 在 D 内有任意阶导数

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\,d\zeta \quad (n=1,2,\cdots) \qquad (4.7)$$

这定理可由下列引理立即推出.

引理 4.1 **设γ是一曲线**[①]，**并且设 $\varphi(\zeta)$是在 γ 上确定的连续函数，那么**

$$F_n(z)=\int_\gamma \frac{\varphi(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z)^n} \qquad (n=1,2,\cdots) \tag{4.8}$$

在$\mathbb{C}-\gamma$内解析，并且 $F_n'(z)=nF_{n+1}(z)$.

$F_1(z)$ 称为柯西型积分. 在解析函数边值问题的研究中要用到它.

证 现对 $F_1(z)$作证明. 先证 $F_1(z)$在 $\mathbb{C}-\gamma$ 内连续. $\forall z_0\in\mathbb{C}-\gamma$, 选取 $\delta>0$, 使得$\{z||z-z_0|<\delta\}\cap\gamma=\emptyset$.取$z\in\{z||z-z_0|<\delta/2\}$, 那么$\forall\zeta\in\gamma$, $|\zeta-z|>\delta/2$, 从而

$$F_1(z)-F_1(z_0)=(z-z_0)\int_\gamma \frac{\varphi(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z)(\zeta-z_0)} \tag{4.9}$$

满足

$$|F_1(z)-F_1(z_0)|\leqslant|z-z_0|\frac{2}{\delta^2}ML, \tag{4.10}$$

其中 $M=\max\{|\varphi(\zeta)||\zeta\in\gamma\}$, L 是曲线 γ 的长. 于是 $F_1(z)$在 $\forall z_0\in\mathbb{C}-\gamma$ 连续，从而在 $\mathbb{C}-\gamma$ 内连续.

再证 $F_1(z)$在 $\forall z_0\in\mathbb{C}-\gamma$ 有导数. 由(4.9), 当 $z\in\mathbb{C}-\gamma$, 并且 $z\neq z_0$时,

$$\frac{F_1(z)-F_1(z_0)}{z-z_0}=\int_\gamma \frac{\varphi(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z)(\zeta-z_0)} \tag{4.11}$$

在 $F_1(z)$中把 $\varphi(\zeta)$换成在 γ 上连续的函数 $\varphi(\zeta)/(\zeta-z_0)$, 并且应用 $F_1(z)$在 z_0 连续这一结果, 从(4.11)可立即推出 $\exists F_1'(z_0)=F_2(z_0)$. 于是对于 $F_1(z)$, 引理得证.

---

① γ 不一定是闭曲线；根据第一章，第 5 段中的规定，它一定是有界曲线.

设引理对某一 $F_{n-1}(z)(n>1)$成立. 现证它对 $F_n(z)$也成立. $\forall z_0\in\mathbb{C}-\gamma$. 先证 $F_n(z)$在 z_0 连续. $\forall z\in\mathbb{C}-\gamma$, 我们有

$$F_n(z)-F_n(z_0)=\left[\int_\gamma \frac{\varphi(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z)^{n-1}(\zeta-z_0)}-\int_\gamma \frac{\varphi(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z_0)^n}\right]$$

$$+(z-z_0)\int_\gamma \frac{\varphi(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z)^n(\zeta-z_0)}. \qquad (4.12)$$

在 $F_{n-1}(z)$中把 $\varphi(\zeta)$换成 $\varphi(\zeta)/(\zeta-z_0)$, 并且应用 $F_{n-1}(z)$在 z_0 连续这一假设, 可见当 $z\to z_0$时, (4.12)右边方括号中的项→0. 设 $|z-z_0|<\delta/2$. 与(4.10)类似, 对于(4.12)右边方括号以外的项, 我们有

$$\left|(z-z_0)\int_\gamma \frac{\varphi(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z)^n(\zeta-z_0)}\right|\leqslant|z-z_0|\frac{2^n}{\zeta^{n+1}}ML.$$

于是得到当 $z\to z_0$时, $F_n(z)-F_n(z_0)\to 0$, 即 $F_n(z)$在 z_0 连续, 从而在 $\mathbb{C}-\gamma$ 内连续.

再证 $F_n(z)$在 $\forall z_0\in\mathbb{C}-\gamma$ 有导数. 由(4.12), 当 $z\in\mathbb{C}-\gamma$, 并且 $z\neq z_0$时,

$$\frac{F_n(z)-F_n(z_0)}{z-z_0}=\frac{1}{z-z_0}\left[\int_\gamma \frac{\varphi(\zeta)d\zeta}{(\xi-z)^{n-1}(\zeta-z_0)}-\int_\gamma \frac{\varphi(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z_0)^n}\right]$$

$$+\int_\gamma \frac{\varphi(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z)^n(\zeta-z_0)}. \qquad (4.13)$$

由所设, $\exists\, F'_{n-1}(z_0)=(n-1)F_n(z_0)$, 并且 $F_n(z)$在 z_0 连续. 在 $F_{n-1}(z)$及 $F_n(z)$中把 $\varphi(\zeta)$换成 $\varphi(\zeta)/\zeta-z_0$, 并且分别应用上两假设, 可见当 $z\to z_0$ 时, (4.13)中包含方括号的一项趋近于

$$(n-1)\int_{\gamma}\frac{\varphi(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z_0)^n(\zeta-z_0)}=(n-1)F_{n+1}(z_0),$$

另一项趋近于

$$\int_{\gamma}\frac{\varphi(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z_0)^n(\zeta-z_0)}=F_{n+1}(z_0),$$

从而 $F_n'(z_0)=nF_{n+1}(z_0)$. 引理证完.

由定理 4.2 可以证明:

系 4.1　设函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析，那么 $f(z)$ 在 D 内有任意阶导数.

证 设 z_0 是 D 内任一点. 作一个以 z_0 为心、并且完全在 D 内的闭圆盘. 对这闭圆盘应用定理 4.2, 可见 $f(z)$ 在 z_0 有任意阶导数.

在数学分析中，我们知道在一个区间内有导数的实变函数 $f(x)$ 在这区间内不一定有二阶导数. 但在一个区域内的解析函数却具有系 4.1 所表述的性质. 这一性质是由柯西公式证明的. 复变函数在一区域内有导数是很强的条件，由它可逐步推出柯西－黎曼条件、柯西定理、柯西公式及解析函数有任意阶导数.

现在把定理 4.2 应用到本段开始时讨论的情形. 设 $f(z)$ 在以 C: $|z-z_0|=\rho_0(0<\rho_0<+\infty)$ 为边界的闭圆盘上解析，那么

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\int_{C_\rho}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz\quad(n=0,1,2,\cdots;0!=1),\tag{4.14}$$

其中 C_ρ 是圆 $|z-z_0|=\rho(0<\rho\leqslant\rho_0)$.

令

$$M(\rho)=\max_{|z-z_0|=\rho}|f(z)|(0<\rho\leqslant\rho_0).\tag{4.15}$$

由(4.14)及(4.15)得

$$|f^{(n)}(z_0)| \leqslant \frac{n!}{2\pi} \cdot \frac{M(\rho)}{\rho^{n+1}} \cdot 2\pi\rho = n! \cdot \frac{M(\rho)}{\rho^n}$$

$$(n=0,1,2,\cdots;0!=1).$$

于是我们有下列定理

定理 4.3　设 $f(z)$ 在以 $C: |z-z_0| = \rho_0 (0<\rho_0<+\infty)$ 为边界的闭圆盘上解析，那么

$$\frac{|f^{(n)}(z_0)|}{n!} \leqslant \frac{M(\rho)}{\rho^n} \ (n=0,1,2,\cdots;0!=1), \quad (4.16)$$

其中 $M(\rho)$ 是由(4.15)确定的，$0<\rho\leqslant\rho_0$.

(4.16)称为柯西不等式．这一公式表明，在定理 4.3 的条件下，$f(z)$ 及其各阶导数在 $z=z_0$ 之值的模，可以用 $|f(z)|$ 在 C_ρ 上的最大值来估计 $(0<\rho\leqslant\rho_0)$．

如果 $f(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 上解析，那么它就称为一个整函数．例如多项式，e^z、$\sin z$ 及 $\cos z$ 都是整函数．由定理4.3 可以推出下列重要的刘维尔定理：

定理 4.4　有界整函数一定恒等于常数.

证　$f(z)$ 是有界整函数，即 $\exists M\in(0,+\infty)$，使得 $\forall z\in\mathbb{C}$，$|f(z)|<M$．$\forall z_0\in\mathbb{C}$，$\forall\rho\in(0,+\infty)$，$f(z)$ 在 $\{z \| z-z_0| \leqslant\rho\}$ 上解析．由(4.16)，$|f'(z_0)|\leqslant M/\rho$．令 $\rho\to+\infty$，可见 $\forall z_0\in\mathbb{C}$，$f'(z_0)=0$，从而 $f(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 上恒等于常数．证完．

5. 莫勒拉定理　应用解析函数有任意阶导数，可以证明柯西定理的逆定理，即**莫勒拉定理**：

定理 5.1　如果函数 $f(z)$ 在单连通区域 D 内连续，并且对于 D 内的任一条简单闭曲线 C，我们有

$$\int_C f(z)dz=0, \quad (5.1)$$

那么 $f(z)$ 在 D 内解析．

证　$\forall z_0\in D$，作以 z_0 为心的圆盘 $K\subset D$．在凸区域 K 内，$f(z)$

连续，并且对于 K 内任一三角形的周界 C，(5.1)成立．完全按照引理 2.2 的证法，可以证明$f(z)$在 K 内有原函数 $F(z)$，即∃ $F'(z)=f(z)$．于是 $F(z)$在 K 内解析．由系 4.1，$f(z)$在 K 内、在 z_0 解析．由于 z_0 的任意性，证完．

从以上证明可以看出，在定理 5.1 中，关于(5.1)，可以只设它对于 D 内任一三角形的周界 C 成立．

*§3．同调及同伦形式的柯西定理

6．链与闭链·指标 在本节中，我们讲述同调及同伦形式的柯西定理．在不作特别说明时，仍把曲线了解为光滑曲线或分段光滑曲线，但一般不设曲线是简单的，沿它的积分的定义，还是与第三章，§1 中一样．现先引进与曲线有关的一些概念．

设曲线 $C\subset$ 区域 $D\subset\mathbb{C}$．设 $f(z)$在 D 内解析．把 C 分划成彼此相衔接的曲线 $C_1, C_2, \cdots, C_n$，那么就有

$$\int_C f(z)dz=\int_{C_1} f(z)dz+\int_{C_2} f(z)dz+\cdots+\int_{C_n} f(z)dz. \tag{6.1}$$

我们把 C 的上述分划写成“形式和”：

$$C=C_1+C_2+\cdots+C_n \tag{6.2}$$

当 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 是 D 中的曲线，而不一定构成某一曲线的分划时，也可考虑它们的形式和(6.2)．这时把 C 称为 D 内的一条链．如果 $C_1, C_2\cdots, C_n$ 是闭曲线，那么就称 C 为 D 内的一条闭链．一条闭曲线可以看作闭链的特例．D 内解析函数在链或闭链 C 上的积分定义为(6.1)．

我们约定，当 $C_k(k=1,2,\cdots,n)$由 $z=z_k(t)(t\in[a,b])$给出时，那么 $\int_{C_k} f(z)dz$ 表示从 $z_k(a)$到 $z_k(b)$的积分，而 $\int_{-C_k} f(z)dz=-\int_{C_k} f(z)dz$，则表示从 $z_k(b)$ 到 $z_k(a)$的积分．

现在定义闭链或闭曲线关于一点的指标．在闭曲线情形，它是曲线围绕该点旋转的圈数．设 C 是一闭链或闭曲线．设 $z\in\mathbb{C}-C$，积分

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{d\zeta}{\zeta-z} \tag{6.3}$$

称为 C 关于 z 的指标，记作 $I_C(z)$；当 C 化为一点时，取 $I_C(z)=0$．显然 $I_{-C}(z)=-I_C(z)$．

指标有下列性质：

定理 6.1　在上述定义中，$I_C(z)$ 取整数值[1]，在 $\mathbb{C}-C$ 中每个区域内，$I_C(z)$ 取整常数值[1]，而在其中每个无界区域内，$I_C(z)$ 为零．

证　如果闭链 C 可表示为形式和(6.2)式，其中 C_k 是闭曲线，那么由(6.1)式，$\forall z\in\mathbb{C}-C$，

$$I_C(z)=\sum_{k=1}^{n} I_{C_k}(z). \tag{6.4}$$

可见只需对闭曲线的情形作出证明．

设 C 是闭曲线．由于 $\dfrac{1}{\zeta-z}$ 的原函数是 $\mathrm{Ln}(\zeta-z)$ 的解析分枝，(6.3)中的积分等于 $\mathrm{Ln}(\zeta-z)$ 的两个解析分枝在 C 上同一点的差，即为 $2\pi i$ 的整数倍，从而 $I_C(z)$ 取整数值．

对于 z 及 $z+\Delta z\in\mathbb{C}-C$，我们有

$$I_C(z+\Delta z)-I_C(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\Delta z}{(\zeta-z)(\zeta-z-\Delta z)}\,dz.$$

于是当 $\Delta z\to 0$ 时，$I_C(z+\Delta z)-I_C(z)\to 0$，即 $I_C(z)$ 在 $\mathbb{C}-C$ 中任一点连续，从而在其中每个区域内取整常数值．

由于 C 是有界的，由(6.3)，当 $|z|$ 充分大时，$|I_C(z)|<1$，从

---

[1] 也可能取 $\pm\infty$．

而在 $\mathbb{C}-C$ 中每个无界区域内，$I_C(z)$为零．证完．

7. 同调形式的柯西定理 设闭链 C_0及$C_1 \subset$ 区域 $D \subset \mathbb{C}$．如果 $\forall z \in \mathbb{C}-D$，

$$I_{C_0}(z)=I_{C_1}(z),$$

那么我们说 C_0 及 C_1 在 D 内同调．如果 $\forall z \in \mathbb{C}-D, I_{C_0}(z)=0$，那么我们说 C_0 在 D 内与零同调．

由(6.4)，如果闭链 C_0 及 C_1 在区域 D 内同调，那么 C_0-C_1 在 D 内与零同调．

不难看出，单连通区域内任一条简单闭曲线与零同调．柯西定理可推广成下列同调形式：

定理 7.1 设$f(z)$在区域 D 内解析．设闭链 C_0 及 C_1 在 D 内同调，那么

$$\int_{C_0} f(z)dz=\int_{C_1} f(z)dz. \tag{7.1}$$

特别，如果闭链 C_0在 D 内与零同调，那么

$$\int_{C_0} f(z)dz=0, \tag{7.2}$$

而且 $\forall z \in D-C_0$，

$$f(z)\cdot I_{C_0}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta. \tag{7.3}$$

(7.3)是柯西公式的同调形式．为了证明这定理，我们先证明两个引理．

引理 7.1 如果$f(z)$在以$\triangle$为周界的闭三角形上连续，并且在这闭三角形上除去一点 α 外解析，那么

$$\int_{\triangle} f(z)dz=0. \tag{7.4}$$

证 如图 19，α 或者在 $\triangle$上，或者在三角形内部．作以 α 为

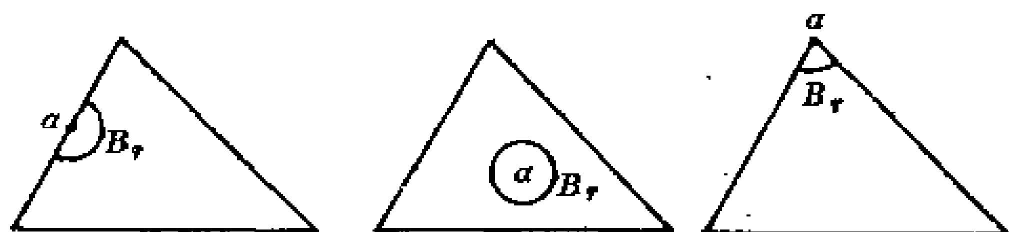


图 19

心、以 r 为半径的小圆，它与闭三角形的交集设为 B_r.

在第一种情形，用 $\triangle_r$ 表示 $\triangle$ 除去作为 B_r 的线段边界部分而得的折线. 这时由柯西定理，

$$\int_{\triangle_r} f(z)dz + \int_{B_r} f(z)dz = 0 ,$$

即

$$\int_{\triangle_r} f(z)dz = -\int_{B_r} f(z)dz .$$

用 M 表示 $|f(z)|$ 在闭三角形上的上界，我们有

$$\left|\int_{B_r} f(z)dz\right| \leqslant M\cdot \pi r \to 0 \ (r \to 0) .$$

因此

$$\int_{\triangle} f(z)dz = -\lim_{r\to 0} \int_{B_r} f(z)dz = 0 .$$

在第二种情形，由柯西定理

$$\int_{\triangle} f(z)dz = \int_{B_r} f(z)dz .$$

于是同样可证明 (7.4).

引理 7.2 **如果 $f(z)$ 在区域 D 内解析，而且 $g(z,\zeta)$ 在 $D\times D = \{(z,\zeta)|z\in D, \zeta\in D\}$ 内定义为**

$$g(z,\zeta)=\begin{cases}\dfrac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}, & (\zeta\neq z),\\ f'(z), & (\zeta=z),\end{cases} \tag{7.5}$$

那么 $g(z,\zeta)$在 $D\times D$ 内连续.

证 在点$(z_0,\zeta_0)\in D\times D\,(z_0\neq\zeta_0)$，$g(z,\zeta)$显然连续. 考虑$(z_0,z_0)\in D\times D$. 在 D 内作圆心为 z_0、半径为r 的圆盘，并且在这圆盘内任取不同的两点 z 及ζ, 那么

$$g(z,\zeta)-g(z_0,z_0)=\frac{1}{\zeta-z}\int_{\overline{z\zeta}}[f'(w)-f'(z_0)]dw,$$

其中$\overline{z\zeta}$ 表示从 z 到ζ 的线段. 因此

$$|g(z,\zeta)-g(z_0,z_0)|\leqslant\sup_{w\in\overline{z\zeta}}|f'(w)-f'(z_0)|,$$

另一方面

$$g(z,z)-g(z_0,z_0)=f'(z)-f'(z_0)$$

于是当$r\to 0$时，亦即当$(z,\zeta)\to(z_0,\zeta_0)$时，$g(z,\zeta)\to g(z_0,\zeta_0)$. 证完.

定理 7.1 的证 先证明(7.3). 令

$$h(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{C_0}g(z,\zeta)d\zeta \quad (z\in D), & (7.6)\\[2ex] \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{C_0}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta \quad (z\overline{\in} D), & (7.6')\end{cases}$$

其中$f(z)$在区域 D 内解析，闭链 C_0 在 D 内与零同调，$g(z,\zeta)$由(7.5)定义. 我们要证明 $h(z)$是整函数，并且恒等于零. 由此根据(7.6)，$\forall z\in D-C_0$,

$$f(z)\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{d\zeta}{\zeta-z}=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta.$$

从而(7.3)成立.

$h(z)$是整函数的证明如下:

1) $h(z)$在$\mathbb{C}-(D\bigcup\partial D)$内解析　　由(7.6′)及引理 4.1 就可看出这一点.

2) $h(z)$在D内解析　　对于D内任一紧集K, $g(z,\zeta)$在$K\times C_0=\{(z,\zeta)|z\in K,\zeta\in C_0\}$上连续，从而一致连续. 与实变函数积分情形类似，$h(z)$在$D$内任一紧集$K$上连续，从而在$D$内连续.

现应用莫勒拉定理 5.1 及这定理后面的说明. 考虑D内任一三角形的周界$\triangle$. 由(7.6)，及$g(z,\zeta)$的一致连续性，我们有

$$2\pi i\int_{\triangle}h(z)dz=\int_{\triangle}dz\int_{C_0}g(z,\zeta)d\zeta=\int_{C_0}d\zeta\int_{\triangle}g(z,\zeta)dz.$$

取定$\zeta\in C_0$, 在以$\triangle$为边界的闭三角形上，$g(z,\zeta)$连续，并且可能除去ζ外解析. 于是由引理 7.1 立即得到

$$\int_{\triangle}h(z)dz=0. \tag{7.7}$$

2)得证.

3) $h(z)$在∂D上解析　　$\forall z_1\in\partial D$, 可以作以z_1为心的一个圆盘K_1, 使得$K_1\bigcap C_0=\varnothing$. 于是由定理 6.1，在$K_1$内，$I_{C_0}(z)$是常数. 已知闭链$C_0$在$D$内同调于零，因此当$z\in k_1\bigcap(\mathbb{C}-D)$ $(\neq\varnothing)$时，$I_{C_0}(z)=0$, 从而$\forall z\in K$, $I_{C_0}(z)=0$. 从而$\forall z\in K$, $h(z)$可统一用(7.6′)表示出来. 又由引理4.1, $h(z)$在z_1及∂D上解析.

由 1)—3)，$h(z)$是整函数得证.

现应用刘维尔定理 4.4 证明$h(z)\equiv 0$. 取$r_0>0$, 使得$E_0=\{z||z|>r_0\}$满足$E_0\bigcap C_0=\varnothing$. 由定理6.1, $\forall z\in E_0$,

$$0=I_{C_0}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{d\zeta}{\zeta-z}.$$

因此由(7.6)及(7.6′)，对于$z\in E_0$, $h(z)$可以用(7.6′)表示出来.

由此可得 $\lim_{z\to\infty} h(z)=0$, 从而 $h(z)$有界并且恒等于零. (7.3)证完.

(7.2)可由(7.3)导出. 选出 $\alpha\in D-C_0$, 并且令 $F(z)=(z-\alpha)f(z)$. 于是由(7.3)及 $F(\alpha)=0$ 就可推出(7.2):

$$\int_{C_0} f(z)dz=\int_{C_0}\frac{F(z)}{z-\alpha}\,dz=2\pi iF(\alpha)\cdot I_{C_0}(\alpha)=0.$$

为了证明(7.1), 只须注意到: 如果闭链 C_0 及 C_1 在 D 内同调, 那么闭链 $C_0-C_1=C_0+(-C_1)$在 D 内与零同调. 于是应用(7.2)就可推出(7.1).

8. 同伦形式的柯西定理 我们往往要考虑可以相互连续变形的曲线. 在下面就连续曲线引进一个明确的定义时, 暂时不遵循第一章, 第 5 节中关于曲线的某些约定.

已给在区域 D 内有相同端点的两条连续曲线 $C_0: z=g_0(t)$及 $C_1: z=g_1(t)$, 其中 $0\leqslant t\leqslant 1$. 如果存在着在 $[0,1]\times[0,1]=\{(t,u)|t$ 及 $u\in[0,1]\}$上确定、在 D 内取值的连续函数 $\delta(t,u)$, 使得

$$\delta(t,0)=g_0(t),\quad \delta(t,1)=g_1(t);\tag{8.1}$$

$\forall u\in[0,1], \delta(0,u)=g_0(0)=g_1(0),\quad \delta(1,u)=g_0(1)=g_1(1),$

那么我们说 C_0 及 C_1 是 D 内有相同端点的同伦连续曲线.

设 C_0 及 C_1 是 D 内的连续闭曲线. 如果存在着在 $[0,1]\times[0,1]$ 上确定、在 D 内取值的连续函数 $\delta(t,u)$, 使得

$$\begin{aligned}&\delta(t,0)=g_0(t),\qquad \delta(t,1)=g_1(t);\\ &\forall u=(0,1),\quad \delta(0,u)=\delta(1,u),\end{aligned}\tag{8.2}$$

那么我们说C_0 及 C_1 是 D 内的同伦闭连续曲线. 特别, 如果函数 $g_1(t)=\alpha$(常数), 那么我们说闭连续曲线 C_0 在 D 内与零同伦.

在上述定义中, 取定 $u\in[0,1]$, $z=\delta(t,u)$表示 D 内一条连续曲线 C_u; 它或者与连续曲线 C_0 及 C_1 有相同的端点, 或者是一条闭连续曲线. 直观看来, 当 u 从 0 连续变到 1 时, 这条连续曲线从C_0 连续变形到 C_1.

例 1 设C_0: $z=g_0(t)$及 $C_1: z=g_1(t)$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$是区域 D 内有相同端点的两条连续曲线. 设在 $[0,1]\times[0,1]$ 上的连续函数

$$\delta(t,u)=(1-u)g_0(t)+ug_1(t)$$
在 D 内取值，那么 C_0 及 C_1 是在 D 内有相同端点的同伦连续曲线.

例2 设区域$D\subset\{z||z|\leqslant R\}(0<R<+\infty)$，那么$C_0:z=Re^{2\pi it}$ 及 $C_1:z=R'e^{2\pi it}(0<R'<R, t\in[0,1]$ 是 D 内的连续闭曲线. 取在$[0,1]\times[0,1]$ 确定、在 D 内取值的连续函数

$$\delta(t,u)=(uR'+(1-u)R)e^{2\pi it},$$

可见 C_0 及 C_1 是在 D 内同伦的连续闭曲线. 如果 C_1 的表示式中的 R'换成 0, 即 C_1 化为原点，那么 C_0 是在 D 内与零同伦的连续闭曲线.

有了同伦概念，可作出单连通区域的明确的定义：**如果区域 $D(\subset\mathbb{C})$内任何闭连续曲线与零同伦，那么区域 D 称为单连通区域.**

在 $\mathbb{C}_\infty$ 上，把连续闭曲线与零同伦的概念扩充到无穷远点情形，同样得到 C_∞ 上单连通区域的定义.

现在我们先阐明光滑或分段光滑闭曲线同调与同伦的关系，然后由同调形式的柯西定理导出同伦形式的这一定理. 光滑或分段光滑曲线同伦，仍采用本段开始时关于连续曲线同伦的定义. 采用前面的记号，现在 C_0 及 C_1 是光滑或分段光滑曲线，但 $\forall u\in(0,1)$，$z=\delta(t,u)(0\leqslant t\leqslant 1)$是连续曲线，而不一定是光滑或分段光滑曲线.

从此开始，我们又把曲线理解为光滑或分段光滑曲线.

现证明关于闭曲线的指标的一个引理：

引理 8.1 **设$C_0:z=g_0(t)$及 $C_1:z=g_1(t)(0\leqslant t\leqslant 1)$是 $\mathbb{C}$ 上的闭曲线. 如果 $\alpha\in\mathbb{C}$, 并且 $\forall t\in[0,1]$，**

$$|g_1(t)-g_0(t)|<|\alpha-g_0(t)|, \tag{8.3}$$

那么 $I_{C_0}(\alpha)=I_{C_1}(\alpha)$.

证 由(8.3)，$\alpha\overline{\in}C_0, \alpha\overline{\in}C_1$. 令

$$g(t)=\frac{g_1(t)-\alpha}{g_0(t)-\alpha},$$

那么由(8.3)，$|g(t)-1|<1$. 于是闭曲线 $C:z=g(t)$在不含 0 的圆盘内，从而

$$\int_C \frac{d\zeta}{\zeta}=0, \text{即} I_C(0)=0.$$

又因

$$\frac{g'(t)}{g(t)}=\frac{g_1'(t)}{g_1(t)-\alpha}-\frac{g_0'(t)}{g_0(t)-\alpha},$$

所以 $I_C(0)=I_{C_1}(\alpha)-I_{C_0}(\alpha)=0$. 引理得证.

定理 8.1　设闭曲线 $C_0:z=g_0(t)$与 $C_1:z=g_1(t)$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$ 在区域 D内同伦，那么 C_0 与 C_1 在 D 内同调. 如果 C_0 在 D 内与零同伦，那么它在 D 内与零同调.

从定理 8.1 及 7.1 可以立即得到同伦形式的柯西定理:

定理 8.2　设$f(z)$在区域 D 内解析. 设闭曲线 C_0 及 C_1 在 D 内同伦，那么(7.1)成立. 设闭曲线 C_0 在 D 内与零同伦，那么(7.2)及(7.3)成立.

定理 8.1 的证明　设闭曲线 C_0 与 C_1 在 D内同伦. 由定义，存在着在$[0,1]\times[0,1]$上确定、在 D 内取值的连续函数 $\delta(t,u)$，使得(8.2)成立.

$\forall\alpha\overline{\in}D$. 由于$[0,1]\times[0,1]$是紧集，可见$\{\delta(t,u)|0\leqslant t, u\leqslant 1\}$也是紧集，从而$\exists\,\varepsilon>0$，使得

$$|\alpha-\delta(t,u)|>2\varepsilon\quad(0\leqslant t,u\leqslant 1). \tag{8.4}$$

因为$\delta(t,u)$在$[0,1]\times[0,1]$上一致连续，所以存在着正整数 n，使得

$$|\delta(t,u)-\delta(t',u')|<\varepsilon\left(|t-t'|+|u-u'|<\frac{1}{n}\right). \tag{8.5}$$

确定闭折线 $P_k:z=\varphi_k(t)(k=0,1,\cdots n;0\leqslant t\leqslant 1)$，其中

$$\varphi_k(t)=\delta\left(\frac{m}{n},\frac{k}{n}\right)\left(t-\frac{m-1}{n}\right)+\delta\left(\frac{m-1}{n},\frac{k}{n}\right)\left(\frac{m}{n}-t\right)$$

$$\left(\frac{m-1}{n}\leqslant t\leqslant\frac{m}{n},m=1,2,\cdots,n\right). \qquad (8.6)$$

由(8.5)及(8.6)，

$$\left|\varphi_k(t)-\delta\left(t,\frac{k}{n}\right)\right|<\varepsilon \quad (k=0,1,\cdots,n;0\leqslant t\leqslant 1). \quad (8.7)$$

特别，取 $k=0$ 及 $k=n$，就有

$$|\varphi_0(t)-g_0(t)|<\varepsilon,|\varphi_n(t)-g_1(t)|<\varepsilon \quad (0\leqslant t\leqslant 1). \ (8.8)$$

由(8.4)及(8.7)，

$$|\alpha-\varphi_k(t)|>\varepsilon \quad (k=0,1,\cdots,n;0\leqslant t\leqslant 1) \qquad (8.9)$$

另一方面，由(8.5)及(8.6)得

$$|\varphi_{k-1}(t)-\varphi_k(t)|<\varepsilon \quad (k=0,1,\cdots,n;0\leqslant t\leqslant 1) \ (8.10)$$

由(8.8)，(8.9)及(8.10)，应用引理 8.1 $n+2$次，可见关于 C_0, P_0, P_1, P_2, $\cdots$, P_n, C_1 之中每一条闭曲线，α 有相同的指标. 由于 α 是 D 外任一点，C_0 与 C_1 在 D 内同调. 当 C_1 化为一点时，C_0 在 D 内与零同调. 证完.

定理 8.1 证明了在一区域内两条同伦的闭曲线也是同调的. 但两条同调的闭曲线却不一定同伦. 例如设 α 及 $\beta\in\mathbb{C}$. 在区域 $D=\mathbb{C}-\{\alpha,\beta\}$中作闭曲线 C_0(走向为 *cdecpqchjcrlc*)及 C_1，如图 20. 由直观看出，$I_{C_0}(\alpha)=I_{C_0}(\beta)=0, I_{C_1}(\alpha)=I_{C_1}(\beta)=0$. 于是 C_0 及 C_1 在 D 内同调. 但它们在 D 内不同伦.

由此可见，即令在闭曲线情形，定理 7.1 比定理 8.2 适用范围更广.

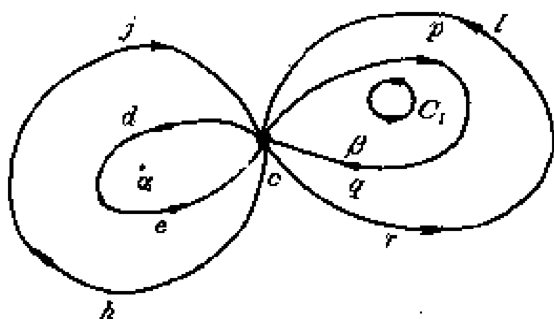


图 20

习 题 三

1. 分别计算沿着(1)直线段；(2)单位圆($|z|=1$)的左半圆；(3)单位圆的右半圆的下列积分：

$$I=\int_{-i}^{i}|z|dz .$$

2. 计算积分

$$I=\int_{L}\operatorname{Re}z dz ,$$

在这里 L 分别表示：(1)单位圆(按反时针方向从 1 到 1 取积分)；(2)从 z_1 沿直线段到 z_2 .

3. 设函数 $f(z)$ 当 $|z-z_0|>r_0\ (0<r_0<r)$ 时是连续的. 令 $M(r)$ 表示 $|f(z)|$ 在 $|z-z_0|=r>r_0$ 上的最大值，并且假定

$$\lim_{r\to+\infty} rM(r)=0 ,$$

试证明

$$\lim_{r\to+\infty}\int_{K_r}f(z)dz=0 .$$

在这里 K_r 是圆 $|z-z_0|=r$.

4. 如果满足上题中条件的函数 $f(z)$ 还在 $|z-z_0|>r_0$ 内解析，那么对任

何 $r>r_0$，

$$\int_{K_r} f(z)dz=0.$$

5. 计算积分

$$\int_{|z|=2}\frac{dz}{z^4-1}.$$

[提示] 利用上题的结果.

6. 设$f(z)$及$g(z)$在单连通区域D内解析，α及β是D内两点，证明

$$\int_\alpha^\beta f(z)g'(z)dz=f(z)g(z)\Big|_\alpha^\beta-\int_\alpha^\beta f'(z)g(z)dz\quad(\text{分部积分公式}),$$

在这里从α到β的积分是沿D内连接α及β的一条简单曲线取的.

7. 计算积分

$$(1)\,I=\int_C\frac{dz}{\sqrt{z}}\;;\;(2)\,I=\int_C\ln z dz,$$

在这里用C表示单位圆(按反时针方向从1到1取积分)，而被积函数分别取为按下列各值决定的解析分枝：(1)$\sqrt{1}=1$或$\sqrt{1}=-1$；(2)$\ln 1=0$或$\ln 1=2\pi i$.

8. 如果积分路线不经过点$\pm i$，那么

$$\int_0^1\frac{dz}{1+z^2}=\frac{\pi}{4}+k\pi\qquad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

9. 证明：

(1) $\left|\int_C(x^2+iy^2)dz\right|\leqslant 2$，$C$为联$-i$到$i$的线段；

(2) $\left|\int_C(x^2+iy^2)dy\right|\leqslant\pi$，$C$为右半单位圆$|z|=1$，$\mathrm{Re}\,z\geqslant0$；

(3) $\left|\int_C\frac{dz}{z^2}\right|\leqslant 2$，$C$为联$i$到$i+1$的线段.

10. 设$f(z)$在原点的邻域内连续，那么

$$\lim_{r \to 0} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})d\theta = 2\pi f(0).$$

11. 计算积分

(1) $\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z} dz$;　　(2) $\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2+2}$;

(3) $\int_{|z|=1} \frac{dz}{z^2+2}$;　　(4) $\int_{|z|=1} \frac{zdz}{(2z+1)(z-2)}$.

12. 证明

$$\left(\frac{z^n}{n!}\right)^2 = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{z^n e^{z\zeta}}{n!\zeta^n}\frac{d\zeta}{\zeta},$$

在这里 C 是围绕原点的一条简单闭曲线.

13. 设

$$f(z) = \int_{|\zeta|=3} \frac{3\zeta^2+7\zeta+1}{\zeta - z} d\zeta,$$

求 $f'(1+i)$.

14. 通过计算

$$\int_{|z|=1} \left(z + \frac{1}{z}\right)^{2n} \frac{dz}{z},$$

证明

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n}\theta d\theta = 2\pi \cdot \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}.$$

15. 如果在 $|z|<1$ 内, $f(z)$ 解析, 并且

$$|f(z)| \leqslant \frac{1}{1-|z|},$$

证明

$$|f^{(n)}(0)| \leqslant (n+1)!\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e(n+1)!\,(n=1,2,\cdots).$$

[提示] 考虑$f(z)$在$|z|=\frac{1}{n+1}$上的积分.

16. 如果$f(z)$在$|z-z_0|>r_0$内解析，并且$\lim\limits_{z\to\infty} zf(z)=A$，那么对任何正数$r>r_0$，

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{K_r} f(z)dz=A,$$

在这里K_r是圆$|z-z_0|=r$，积分是按反时针方向取的.

本题是关于含无穷远点的区域的柯西定理.

17. 如果函数$f(z)$在简单闭曲线C的外区域D内及C上每一点解析.并且

$$\lim_{z\to\infty} f(z)=\alpha,$$

那么

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\begin{cases}-f(z)+\alpha & (\text{当 } z\in D \text{ 时}),\\ \alpha & (\text{当} z\in C \text{ 的内区域时}),\end{cases}$$

这里沿C的积分是按反时针方向取的.

本题是关于含无穷远点的区域的柯西公式.

[提示] 应用柯西公式证明.

18. 设$f(z)$是一整函数，并且$\forall z\in\mathbb{C}$，

$$|f(z)|\leqslant A+B|z|^k,$$

其中A,B及k是正数，证明$f(z)$是一多项式.

19. 设$f(z)$在单连通区域内解析，并且不等于零，那么

(1) $\exists$ $g(z)$在D内解析，使得$e^{g(z)}=f(z)$；

(2) 对于整数$q\geqslant 2$，$\exists$ $h(z)$在D内解析，使得$[h(z)]^q=f(z)$.

[提示] 设$g(z)$是$f'(z)/f(z)$在D内的原函数，考虑$e^{-g(z)}f(z)$.

20. 设$P(z)$是一个$n(\geqslant 1)$次多项式，并且$P(z)=0$的根全部在区域D内，在这里D的边界是一条简单闭曲线C.

(1) 令

$$R(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(t)}{P(t)}\frac{P(t)-P(z)}{t-z}dt \qquad (z\in D),$$

$$Q(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(t)}{P(t)}\frac{dt}{t-z} \qquad (z\in D),$$

证明$R(z)$是次数不超过$n-1$的一个多项式，并且$Q(z)$在D内解析.

(2) 证明$\forall\ z\in D$,

$$f(z)=P(z)Q(z)+R(z).$$

如果在D内解析的函数$Q_1(z)$及次数不超过$n-1$的多项式$R_1(z)$满足

$$f(z)=P(z)Q_1(z)+R_1(z),$$

那么

$$Q(z)\equiv Q_1(z),\ R(z)\equiv R_1(z).$$

第四章 级 数

§1. 级数和序列的基本性质

1. 复数项级数和复数序列 与研究实变函数时一样，级数和序列是研究复变函数的重要工具. 在本节中，我们研究级数和序列的基本性质. 包括解析函数项级数和序列及幂级数的基本性质. 现在先从复数序列开始.

复数序列就是

$$z_1 = a_1 + ib_1, z_2 = a_2 + ib_2, \cdots, z_n = a_n + ib_n, \cdots,$$

在这里z_n是复数，$a_n = \mathrm{Re}z_n$，$b_n = \mathrm{Im}z_n$；我们把这一序列简单地记作$\{z_n\}$. 显然这一序列与两个实数序列$\{a_n\}$及$\{b_n\}$相对应. 按照$\{|z_n|\}$是有界或无界序列，$\{z_n\}$分别称为有界序列或无界序列.

设 z_0 是一个复常数. **如果任给 $\varepsilon > 0$，可以找到一个正整数 N，使得当 $n > N$ 时，**

$$|z_n - z_0| < \varepsilon,$$

那么我们说$\{z_n\}$有极限 z_0，或者说$\{z_n\}$是收敛序列，并且收敛于 z_0， 记作

$$\lim_{n \to +\infty} z_n = z_0. \tag{1.1}$$

如果序列$\{z_n\}$不收敛，则称$\{z_n\}$发散，或者说它是发散序列.

令 $z_0 = a + ib$，其中 a 及 b 是实数. 由不等式

$$|a_n - a| \text{ 及 } |b_n - b| \leqslant |z_n - z_0| \leqslant |a_n - a| + |b_n - b|$$

容易看出，(1.1)与下列两极限式等价：

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = a, \lim_{n \to +\infty} b_n = b, \tag{1.2}$$

这就是说，**序列$\{z_n\}$收敛(于 z_0)的必要与充分条件是：序列$\{a_n\}$**

收敛(于 a)**以及序列**$\{b_n\}$**收敛**(于 b).

复数序列也可解释为复平面上的点列. 于是点列$\{z_n\}$收敛于 z_0 或者说有极限点 z_0 的定义可以叙述为: **任给 z_0 的一个邻域, 相应地可找到一个正整数 N, 使得当 $n>N$ 时, z_n 在这个邻域内.**

关于两个实数序列相应项之和、差、积、商所成序列的极限的结果, 不难推广到复数序列.

复数项级数就是

$$z_1+z_2+\cdots+z_n+\cdots, \tag{1.3}$$

或记作 $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ 或 $\sum z_n$ 其中 z_n 是复数. 与这级数相对应, 作复数序列

$$\sigma_n=z_1+z_2+\cdots+z_n. \tag{1.4}$$

如果这序列收敛, 那么我们说级数(1.3)收敛; 如果序列(1.4)的极限是 σ, 那么我们说级数(1.3)的和是 σ, 或者说级数(1.3)收敛于 σ, 记作

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z_n=\sigma.$$

如果序列(1.4)发散, 那么我们说级数(1.3)发散.

相反地, 对应于复数序列$\{z_n\}$, 可作一复数项级数

$$z_1+(z_2-z_1)+(z_3-z_2)+\cdots+(z_n-z_{n-1})+\cdots \tag{1.5}$$

序列$\{z_n\}$收敛或发散依照级数(1.5)收敛或发散而定. 于是任给一复数序列或复数项级数, 一定有一相应的复数项级数或复数序列, 它们的收敛或发散性质相同. 一般说来, 复数项级数及复数序列有相应的性质.

按照 $\varepsilon-N$ 说法, 级数(1.3)收敛于 z_0 的定义可叙述为: **任给 $\varepsilon>0$, 可以找到一个正整数 N, 使得当 $n>N$ 时,**

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k-z_0\right|<\varepsilon.$$

根据收敛级数的定义, 可以立即推出: **如果级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ 收敛,**

那么

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = \lim_{n\to+\infty}(\sigma_n - \sigma_{n-1}) = 0 .$$

令 $a_n = \mathrm{Re}z_n$, $b_n = \mathrm{Im}z_n$, $a = \mathrm{Re}\sigma$, $b = \mathrm{Im}\sigma$. 我们有

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} a_k + i\sum_{k=1}^{n} b_k ,$$

根据关于序列的结果不难看出: **级数(1.3)收敛(于 σ)的必要与充分条件是级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛(于 a)以及级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ 收敛(于 b)**.

关于实数项级数的一些结果, 也可以不加改变地推广到复数项级数. 例如柯西收敛原理就可推广到复数项级数的情形:

级数(1.3)收敛的必要与充分条件是: 任给 $\varepsilon>0$, 可以找到一个正整数 $N>0$, 使得当 $n>N, p=1,2,3,\cdots$ 时,

$$|z_{n+1} + z_{n+2} + \cdots + z_{n+p}| < \varepsilon .$$

关于复数序列的柯西收敛原理如下:

序列$\{z_n\}$收敛的必要与充分条件是: 任给$\varepsilon>0$, 可以找到一个正整数 $N>0$, 使得当 m 及 $n>N$ 时,

$$|z_m - z_n| < \varepsilon.$$

上述原理可从关于 Σa_n 与 Σb_n 及关于$\{a_n\}$与$\{b_n\}$的相应结果推出.

对于复数项级数(1.3), 我们引进绝对收敛的概念. 如果级数

$$|z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n| + \cdots \tag{1.6}$$

收敛, 那么级数(1.3)称为绝对收敛.

由此可见, 要判断级数(1.3)的绝对收敛性, 只须判断正项级数(1.6)的收敛性. 因此正项级数的一切收敛性判别法, 都可用来判断复数项级数的绝对收敛性.

由于

$$\sum_{k=1}^{n}|a_k| \text{ 及 } \sum_{k=1}^{n}|b_k| \leqslant \sum_{k=1}^{n}|z_k| = \sum_{k=1}^{n}\sqrt{a_k^2+b_k^2} \leqslant \sum_{k=1}^{n}|a_k| + \sum_{k=1}^{n}|b_k| ,$$

可见级数(1.3)绝对收敛的必要及充分条件是：级数 $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ 及 $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$ 绝对收敛.

于是可以推出，如果级数(1.3)绝对收敛，那么它一定收敛. 这是因为这时级数 $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ 及 $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$ 收敛.

例 当 $|\alpha|<1$ 时，$1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^n+\cdots$ 绝对收敛；并且由于

$$1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^n=\frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha},\lim_{n\to+\infty}\alpha^{n+1}=0,$$

我们有：当 $|\alpha|<1$ 时，

$$\frac{1}{1-\alpha}=1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^n+\cdots.$$

对于两个绝对收敛的复数项级数，也可作乘积. 我们有：

如果复数项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} z'_n$ 及 $\sum_{n=1}^{+\infty} z''_n$ 绝对收敛，并且它们的和分别是 σ' 及 σ''，那么级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(z'_1z''_n+z'_2z''_{n-1}+\cdots+z'_nz''_1) \qquad (1.7)$$

也绝对收敛，并且它的和是 $\sigma'\sigma''$.

级数(1.7)称为级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} z'_n$ 及 $\sum_{n=1}^{+\infty} z''_n$ 的柯西乘积. 这一结果的证明与实数项级数的情形相同，现证明如下：

由于 $\sum_{n=1}^{+\infty} z'_n$ 及 $\sum_{n=1}^{+\infty} z''_n$ 绝对收敛，存在着正数 M，使得对任何正整数 k，

$$|z_1'|+|z_2'|+\cdots+|z_k'|<M,$$
$$|z_1''|+|z_2''|+\cdots+|z_k''|<M. \tag{1.8}$$

其次任给 $\varepsilon>0$，存在着$N>0$，使得对任何整数$k>N$及任何正整数p，

$$|z'_{k+1}+z'_{k+2}+\cdots+z'_{k+p}|<\varepsilon,$$
$$|z''_{k+1}+z''_{k+2}+\cdots+z''_{k+p}|<\varepsilon. \tag{1.9}$$

在(1.9)中令$p\to\infty$，可见当$k>N$时，

$$\left|\sigma'-\sum_{k=1}^{k} z_k'\right|\leqslant\varepsilon,\ \left|\sigma''-\sum_{k=1}^{k} z_k''\right|\leqslant\varepsilon. \tag{1.9 $'$}$$

把级数(1.7)前m项的部分和记作S_m，于是

$$\begin{aligned}S_m-\sum_{n=1}^{[m/2]} z_n'\sum_{n=1}^{[m/2]} z_n''= & z_1''(z'_{[m/2]+1}+z'_{[m/2]+2}+\cdots+z'_m)\\ & +z_2''(z'_{[m/2]+1}+z'_{[m/2]+2}+\cdots+z'_{m-1})\\ & +\cdots+z''_{m_1}z'_{[m/2]+1}\\ & +z_1'(z''_{[m/2]+1}+z''_{[m/2]+2}+\cdots+z''_m)\\ & +z_2'(z''_{[m/2]+1}+z''_{[m/2]+2}+\cdots+z''_{m-1})\\ & +\cdots+z'_{m_1}z'_{[m/2]+1},\end{aligned}$$

其中$[m/2]$表示不超过$m/2$的最大整数，当m为奇数时，$m_1=[m/2]$；当m为偶数时，$m_1=[m/2]-1$. 由(1.8)及(1.9)，当$m>2N$时，

$$\begin{aligned}\left|S_m-\sum_{n=1}^{[m/2]} z_n'\sum_{n=1}^{[m/2]} z_n''\right| & <(|z_1''|+|z_2''|+\cdots+|z''_{m_1}|)\varepsilon\\ & +(|z_1'|+|z_2'|+\cdots+|z'_{m_1}|)\varepsilon<2M\varepsilon.\end{aligned}$$

于是由上式及(1.8)与(1.9 $'$)，当$m>2N$时，

$$|S_m-\sigma'\sigma''|\leqslant\left|S_m-\sum_{n=1}^{[m/2]} z_n'\sum_{n=1}^{[m/2]} z_n''\right|+\left|\sum_{n=1}^{[m/2]} z_n'\sum_{n=1}^{[m/2]} z_n''-\sigma'\sigma''\right|$$

$$<2M\varepsilon+\left|\sum_{n=1}^{[m/2]} z_n'\right|\left|\sum_{n=1}^{[m/2]} z_n''-\sigma''\right|+|\sigma''|\left|\sum_{n=1}^{[m/2]} z_n'-\sigma'\right|$$

$$<2M\varepsilon+M\varepsilon+M\varepsilon=4M\varepsilon.$$

因此$\lim_{m\to\infty} S_m=\sigma'\sigma''$，证完.

2. 复变函数项级数和复变函数序列 设$\{f_n(z)\}$在复平面点集E上有定义($n=1,2,\cdots$)，那么

$$f_1(z)+f_2(z)+\cdots+f_n(z)+\cdots \tag{2.1}$$

是在E上的复变函数项级数,记作$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z)$或$\sum f_n(z)$. 设函数$f(z)$在$E$上有定义，如果在$E$上每一点$z$，级数(2.1)收敛[于$f(z)$]，那么我们说级数(2.1)在$E$上收敛[于$f(z)$]，或者说这级数有和$f(z)$，记作

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z)=f(z).$$

$$f_1(z),\ f_2(z),\ \cdots,f_n(z),\cdots \tag{2.1'}$$

是E上的复变函数序列,记作$\{f_n(z)\}_{n=1}^{+\infty}$或$\{f_n(z)\}$. 设函数$\varphi(z)$在$E$上有定义.如果在$E$上每一点$z$,序列(2.1')收敛[于$\varphi(z)$]，那么我们说序列(2.1')收敛[于$\varphi(z)$],或者说这序列有极限函数$\varphi(z)$,记作

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(z)=\varphi(z).$$

我们不难按照$\varepsilon-N$说法叙述级数(2.1)及序列(2.1')在E上收敛的定义.

如果任给$\varepsilon>0$,可以找到一个与ε有关、而与z无关的正整数$N=N(\varepsilon)$，使得当$n>N$, $z\in E$时,

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f_k(z) - f(z)\right| < \varepsilon \tag{2.2}$$

或

$$|f_n(z) - \varphi(z)| < \varepsilon, \tag{2.2'}$$

那么我们说级数(2.1)或序列(2.1′)在E上一致收敛[于$f(z)$或$\varphi(z)$].

与实变函数项级数和序列的情形一样,可以推出关于级数(2.1)和序列(2.1′)的柯西一致收敛原理:

级数(2.1)或序列(2.1′)在E上一致收敛的必要与充分条件是,任给$\varepsilon>0$,可以找到一个与ε有关、而与z无关的正整数$N=N(\varepsilon)$,使得当$z\in E, n>N, p=1,2,\cdots$时,

$$|f_{n+1}(z)+f_{n+2}(z)+\cdots+f_{n+p}(z)|<\varepsilon$$

或

$$|f_{n+p}(z)-f_n(z)|<\varepsilon.$$

由此可以立即推出级数(2.1)的一致收敛性的一种常用的判别法——**外尔斯特拉斯判别法**:

设$f_n(z)$在复平面点集E上有定义($n=1,2,3,\cdots$),并且设

$$a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots$$

是一收敛的正项级数.设在E上,

$$|f_n(z)|\leqslant a_n \quad (n=1,2,3,\cdots),$$

那么级数(2.1)在E上一致收敛.

与实变函数项级数的情形一样,不难证明下列定理:

定理2.1 设复平面点集E表示区域、闭区域或简单曲线.**设$f_n(z)$在集E上连续($n=1,2,3,\cdots$),并且级数(2.1)或序列(2.1′)在E上一致收敛于$f(z)$或$\varphi(z)$,那么$f(z)$或$\varphi(z)$在E上连续.**

定理2.2 设$f_n(z)$在简单曲线 C 上连续($n=1,2,3,\cdots$)，并且级数(2.1)或序列(2.1′)在C 上一致收敛于$f(z)$或 $\varphi(z)$，那么

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\int_C f_n(z)dz=\int_C f(z)dz \text{ 或 } \lim_{n\to+\infty}\int_C f_n(z)dz=\int_E \varphi(z)dz .$$

在研究复变函数项级数和序列逐项求导数的问题时，我们考虑解析函数项级数和序列.在这里要应用莫勒拉定理及柯西公式来研究和函数与极限函数的解析性及其导数的求法.

在讲述主要定理以前，先引进一个新的定义.设函数$f_n(z)$在区域 D 内解析($n=1,2,3,\cdots$).如果级数(2.1)或序列(2.1′)在D 内任一有界闭区域上一致收敛于函数$f(z)$或 $\varphi(z)$，那么我们说级数(2.1)或序列(2.1′)在D 中内闭一致收敛于$f(z)$或 $\varphi(z)$.

我们有下列重要的**外尔斯特拉斯定理**:

定理2.3 设函数$f_n(z)$在区域 D内解析($n=1,2,3,\cdots$)，并且级数$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z)$ 或序列$\{f_n(z)\}$在 D 中内闭一致收敛于函数 $f(z)$ 或 $\varphi(z)$，那么$f(z)$或$\varphi(z)$在 D 内解析，并且在D 内，

$$f^{(k)}(z)=\sum_{n=1}^{+\infty} f_n^{(k)}(z) \text{或} f^{(k)}(z)=\lim_{n\to+\infty} f_n^{(k)}(z) \quad (k=1,2,3,\cdots).$$

证 先证明$f(z)$在 D 内任一点 z_0 解析，取 z_0 的一个邻域 U，使其包含在 D 内. 在 U 内任作一条简单闭曲线 C. 由定理 2.2 以及柯西定理，

$$\int_C f(z)dz=\sum_{n=1}^{+\infty}\int_C f_n(z)dz=0 .$$

因此根据莫勒拉定理，可见 $f(z)$ 在 U 内解析. 再由于 z_0 是 D 内任一点，因此 $f(z)$ 在 D 内解析.

其次，设 U 的边界即圆 K 也在区域 D 内. 于是

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f_n(z)}{(z-z_0)^{k+1}}$$

对于 $z \in K$ 一致收敛于 $\dfrac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}$. 由定理 2.2，我们有

$$\frac{k!}{2\pi i}\int_K \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}\, dz = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{k!}{2\pi i}\int_K \frac{f_n(z)}{(z-z_0)^{k+1}}\, dz,$$

亦即

$$f^{(k)}(z_0) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n^{(k)}(z_0) \qquad (k=1, 2, 3, \cdots).$$

由此完成定理中关于级数部分的证明. 关于序列部分的证明可完全类似地作出.

我们注意到定理 2.3 中的假设比数学分析中的相应定理简单一些.

3. 幂级数 在本段中，我们研究一类特别的解析函数项级数即幂级数

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n (z-z_0)^n = \alpha_0 + \alpha_1(z-z_0) + \alpha_2(z-z_0)^2 + \cdots$$
$$+ \alpha_n(z-z_0)^n + \cdots, \tag{3.1}$$

其中 z 是复变数，系数 α_n 是任何复常数. 这类级数在复变函数论中有特殊重要的意义. 一方面，在本段中我们要证明，一般幂级数在一定的区域内收敛于一解析函数；另一方面，

在下节中我们还要证明，在一点解析的函数在这点的一个邻域内可以用幂级数表示出来. 幂级数不仅是研究解析函数的一个重要工具，而且在实际计算中应用起来也比较方便.

首先研究级数(3.1)的收敛性. 为此，我们先引进下列阿贝尔第一定理:

定理 3.1　如果幂级数(3.1)在 $z_1(\neq z_0)$ 收敛，那么对满足 $|z-z_0|<|z_1-z_0|$ 的任何 z，(3.1)不仅收敛，而且绝对收敛.

证　由于级数(3.1)在 z_1 收敛，所以有

$$\lim_{n\to+\infty}\alpha_n(z_1-z_0)^n=0.$$

因此存在着有限常数 M，使得 $|\alpha_n(z_1-z_0)^n|\leqslant M(n=0,1,2,\cdots)$. 把级数(3.1)写成

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\alpha_n(z_1-z_0)^n\left(\frac{z-z_0}{z_1-z_0}\right)^n,$$

我们有

$$|\alpha_n(z-z_0)^n|=|\alpha_n(z_1-z_0)^n|\left|\frac{z-z_0}{z_1-z_0}\right|^n$$

$$\leqslant M\left|\frac{z-z_0}{z_1-z_0}\right|^n=Mk^n,$$

其中已令 $k=\left|\frac{z-z_0}{z_1-z_0}\right|<1$. 由于级数 $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}Mk^n$ 收敛，级数(3.1)在满足 $|z-z_0|<|z_1-z_0|$ 的任何点 z 不仅收敛，而且绝对收敛.

与幂级数(3.1)相对应，作实系数幂级数

$$\sum_{n=0}^{+\infty}|\alpha_n|x^n=|\alpha_0|+|\alpha_1|x+|\alpha_2|x^2+\cdots+|\alpha_n|x^n+\cdots, \quad (3.2)$$

其中 x 为实变数;这样的幂级数在数学分析中已经研究过了.根据它的收敛性以及定理3.1 可以证明:

定理 3.2 设级数(3.2)的收敛半径是 R.按照不同情况,我们分别有:

(1) 如果 $0<R<+\infty$,那么当 $|z-z_0|<R$ 时,级数(3.1)绝对收敛;当 $|z-z_0|>R$ 时,它发散.

(2) 如果 $R=+\infty$,那么级数(3.1)在复平面上每一点绝对收敛.

(3) 如果 $R=0$,那么级数(3.1)在复平面上除去 $z=z_0$ 外每一点发散.

证 先考虑 $0<R<+\infty$ 的情形.如果 $|z_1-z_0|<R$,那么可以找到一个正实数 r_1,使它满足 $|z_1-z_0|<r_1<R$.由于级数(3.2)在 $x=r_1$ 绝对收敛,级数(3.1)在 $z-z_0=r_1$ 时绝对收敛,从而由定理3.1,它在 $z=z_1$ 时也绝对收敛.

如果 $|z_1'-z_0|>R$,那么可以找到一个正实数 r_1' 使它满足 $|z_1'-z_0|>r_1'>R$.假定级数(3.1) 在 $z=z_1'$ 时收敛,那么级数(3.2)在 $x=r_1'$ 也收敛,与所设相矛盾,这样就证明了(1).

(2)及(3)可用类似的方法来证明.

在定理 3.2 中所讲述的情形(1)下,当 $|z-z_0|=R$ 时,级数(3.1)可能收敛,也可能发散.

定理3.2 中的数 R ($0<R<+\infty$) 称为级数(3.1)的收敛半径,$|z-z_0|<R$ 称为它的收敛圆盘.当 $R=+\infty$ 时,我们说(3.1)的收敛半径是 $+\infty$,收敛圆盘扩大成复平面. 当 $R=0$ 时,我们说(3.1)的收敛半径是 0,收敛圆盘缩成一点 $z=z_0$. 以下我们说幂级数有收敛圆盘都是指收敛半径大于零的情形. 求(3.1)的

收敛半径的问题归结为求(3.2)的收敛半径的问题.数学分析中已经讲述过,在常见的情况下,(3.2)的收敛半径可以用达朗贝尔法则或柯西法则求出;在一般情况下,则可用柯西－阿达马公式求出.由求(3.2)的收敛半径的公式,可立即推出:

定理 3.3　如果下列条件之一成立:

(1)
$$l=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right|, \tag{3.3}$$

(2)
$$l=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|\alpha_n|}, \tag{3.4}$$

(3)
$$l=\overline{\lim_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{|\alpha_n|}, \tag{3.5}$$

那么当 $0<l<+\infty$ **时,级数(3.1)的收敛半径** $R=\frac{1}{l}$;**当** $l=0$ **时,** $R=+\infty$;**当** $l=+\infty$ **时,** $R=0$.

(3.5)称为柯西－阿达马公式,它适用于任何幂级数(3.1).

现证明(3.5).为此,先引进实数序列的上极限的概念.已给实数序列$\{a_n\}$.数 $L\in(-\infty,+\infty)$满足下列条件:任给$\varepsilon>0$,(1)**至多有有限个** $a_n>L+\varepsilon$;(2) **有无穷个** $a_n>L-\varepsilon$,**那么说序列**$\{a_n\}$**的上极限是** L,**记作**

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}a_n=L.$$

如果任给 $M>0$,**有无穷个** $a_n>M$,**那么说** $\{a_n\}$ **的上极限是** $+\infty$,**记作**

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}a_n=+\infty.$$

如果任给 $M>0$,**至多有有限个** $a_n>-M$,**那么说** $\{a_n\}$**的上**

极限(亦即极限)是 $-\infty$,记作

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\, a_n=-\infty\ .$$

(3.5)的证明如下:设 $0<l<+\infty$. 任取定 z', 使得 $|z'-z_0|<1/l$. 可找到 $\varepsilon>0$,使得 $|z'-z_0|<1/(l+2\varepsilon)$. 又由上极限的定义,存在着 $N>0$,使得当 $n>N$ 时,

$$\sqrt[n]{|\alpha_n|}<l+\varepsilon\ ,$$

从而

$$|\alpha_n|\,|z'-z_0|^n<[(l+\varepsilon)/(l+2\varepsilon)]^n\ .$$

因此级数(3.1)在 $z=z'$ 时绝对收敛.由于 z' 的任意性,可见它在 $|z-z_0|<1/l$ 内绝对收敛.

另一方面,任取定 z'',使得 $|z''-z_0|>1/l$. 可找到 $\varepsilon\in(0,l/2)$, 使得 $|z''-z_0|>1/(l-2\varepsilon)$. 又由上极限的定义,有无穷个 α_n 满足 $\sqrt[n]{|\alpha_n|}>l-\varepsilon$,即满足

$$|\alpha_n|\,|z''-z_0|^n>[(l-\varepsilon)/(l-2\varepsilon)]^n>1\ .$$

因此级数(3.1)在 $z=z''$ 发散, 从而在 $|z-z_0|>1/l$ 内发散.

在 $l=0$ 或 $+\infty$ 时, 可类似地证明(3.5).

幂级数(3.1)的和是在收敛圆盘内有定义的一个函数,称为和函数.我们要证明它是在收敛圆盘内的一个解析函数.

定理 3.4 设幂级数(3.1)有收敛圆盘 $|z-z_0|<R$,那么在 $|z-z_0|<R$ 内,它的和函数

$$f(z)=\alpha_0+\alpha_1(z-z_0)+\alpha_2(z-z_0)^2+\cdots$$
$$+\alpha_n(z-z_0)^n+\cdots \tag{3.6}$$

解析,并且

$$f^{(n)}(z)=n!\,\alpha_n+\frac{(n+1)!}{1!}\alpha_{n+1}(z-z_0)+\cdots(n=1,2,3,\cdots). \tag{3.7}$$

证 先证明(3.1)在任何闭圆盘 $|z-z_0|\leqslant r(<R)$上一致收敛. 事实上,这时

$$|\alpha_n(z-z_0)^n|\leqslant|\alpha_n|r^n,$$

而级数(3.1)当 $z-z_0=r$ 时绝对收敛. 因此由外尔斯特拉斯判别法就可推出(3.1)在 $|z-z_0|\leqslant r$ 上一致收敛.

显然,(3.1)在 $|z-z_0|<r$ 中内闭一致收敛. 于是由外尔斯特拉斯定理, 在 $|z-z_0|<r$ 内,(3.1)的和函数 $f(z)$解析,并且(3.7)成立.

圆盘 $|z-z_0|<R$ 内任一点一定可以包含在一个半径充分大的圆盘 $|z-z_0|<r(<R)$内. 因此在 $|z-z_0|<R$ 内任一点,$f(z)$解析,并且(3.6)成立. 定理 3.4 证完.

幂级数在收敛圆上可能收敛,也可能发散,而且在其上一点收敛或发散,与和函数是否可以扩充成为在该点解析的函数无关. 现举例如下:

例 1 级数

$$\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+\cdots+z^n+\cdots$$

的收敛半径是 1.

与实数项级数情形一样,不难看出,复数项级数收敛的一个必要条件也是一般项趋近于零. 由于在 $|z|=1$ 上任一点,上列级数的一般项不趋近于零. 可见这级数在其收敛圆上处处发散. 但是它的和函数除在 $z=1$ 外,处处解析.

例 2 级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{z^{n+1}}{n(n+1)}$$

的收敛半径是 1.

在收敛圆 $|z|=1$ 上,

$$\left|(-1)^{n+1}\frac{z^{n+1}}{n(n+1)}\right|=\frac{1}{n(n+1)}.$$

而级数 $\Sigma\frac{1}{n(n+1)}$ 收敛. 可见上列幂级数在收敛圆上处处收敛.

由 § 2 第4段，例2及定理2.2,上列幂级数的和函数是

$$\int_0^z \ln(1+\zeta)d\zeta \quad (\ln 1=0).$$

它在 $|z|=1$上，除去 $z=-1$ 外，处处解析.

§2. 泰 勒 展 式

4. 解析函数的泰勒展式 在上一节中,我们已经讲到幂级数的和函数在收敛圆盘内解析,现在我们证明:

定理 4.1 设函数$f(z)$在圆盘 $U:|z-z_0|<R$ 内解析,那么在U内,

$$f(z)=f(z_0)+\frac{f'(z_0)}{1!}(z-z_0)+\frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2+\cdots$$

$$+\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n+\cdots. \tag{4.1}$$

证 设 $z\in U$. 以 z_0为心,在U 内作一圆C ,使 z 属于其内区域(图21).我们有

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta. \tag{4.2}$$

由于当 $\zeta \in C$ 时，$\left|\dfrac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right|=q<1$，

因此这时根据第 1 段中的例，

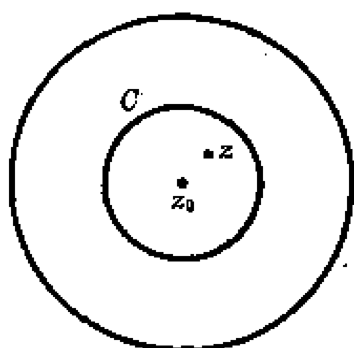


图 21

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{\zeta-z_0-(z-z_0)}$$

$$=\frac{1}{\zeta-z_0}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z-z_0}{\zeta-z_0}}$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\ ,\tag{4.3}$$

上式右边的级数当 $\zeta \in C$ 时一致收敛.

把(4.3)代入(4.2)，然后逐项积分，就得到

$$f(z)=\alpha_0+\alpha_1(z-z_0)+\cdots+\alpha_n(z-z_0)^n+\cdots,\tag{4.4}$$

其中

$$\alpha_n=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\,d\zeta=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\tag{4.5}$$

$$(n=0,1,2,\cdots;0!=1).$$

由于 z 是 U 内任一点，定理证完.

显然幂级数(4.1)的收敛半径大于或等于 R.

结合定理 3.4 及定理 4.1，就可推出：

定理 4.2　函数$f(z)$在一点 z_0 解析的必要与充分条件是：它在 z_0 的某一邻域内有幂级数展式(3.6).

在定理 4.1 中，$f(z)$在 U 内的幂级数展式(4.1)称为$f(z)$在 $z=z_0$ 或在 U 内的泰勒展式. 另一方面，由定理 3.4 可立即推

得：

系 4.1 幂级数是它的和函数在收敛圆盘内的泰勒展式，亦即

$$\alpha_0=f(z_0),\ \alpha_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\ (n=1,2,3,\cdots).$$

由此可得：

系 4.2 在定理 4.1 中，幂级数的和函数$f(z)$在 U 内不可能有另一种形如(4.4)的幂级数展式.

这一性质称为解析函数的幂级数展式的唯一性.

有时我们把幂级数称为泰勒级数.

我们不难作出一些初等函数的泰勒展式，它们的形状与实变数的情形相同.

例 1 求 e^z, $\cos z$ 及 $\sin z$ 在 $z=0$ 的泰勒展式.

由(4.1)可立即推出：

$$e^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}+\cdots,\tag{4.6}$$

$$\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\cdots,\tag{4.7}$$

$$\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\cdots,\tag{4.8}$$

这三个级数都在整个复平面上收敛，因此这三个式子在复平面上成立.

我们知道，在复平面上以某些射线为割线而得的区域内，对数函数和一般幂函数可以分成解析分枝. 因此在已给区域

中任一圆盘内，可以作出这些分枝的泰勒展式.

例 2 求 $\mathrm{Ln}(1+z)$的下列解析分枝在 $z=0$ 的泰勒展式:

$$\ln(1+z)=\ln|1+z|+i\arg(1+z)$$

$$(-\pi<\arg(1+z)<\pi).$$

已给分枝在 $z=0$ 的值为0,它在 $z=0$ 的一阶导数为1,二阶导数为 $-1,\cdots,n$ 阶导数为$(-1)^{n-1}(n-1)!,\cdots$,因此它在 $z=0$ 或在$|z|<1$ 内的泰勒展式是:

$$\ln(1+z)=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n}+\cdots. \quad (4.9)$$

我们也可直接算出幂级数(4.9)的收敛半径是 1.

例 3 求 $(1+z)^\alpha$ 的下列解析分枝在 $z=0$ 的泰勒展式(这里 α 不是整数): $e^{\alpha\ln(1+z)}$ $(\ln 1=0)$.

已给分枝在 $z=0$ 的值是 1, 它在 $z=0$ 的一阶导数是 α，二阶导数是 $\alpha(\alpha-1)$，$\cdots$ n 阶导数是 $\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)$，$\cdots$. 因此已给分枝在 $z=0$ 或 $|z|<1$ 内的泰勒展式是:

$$e^{\alpha\ln(1+z)}=1+\alpha z+\binom{\alpha}{2}z^2+\cdots+\binom{\alpha}{n}z^n+\cdots, \quad (4.10)$$

这里

$$\binom{\alpha}{n}=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{1\cdot 2\cdots n}.$$

我们也可直接算出幂级数(4.10)的收敛半径是 1 .

(4.10)也适用于 α 是整数的情形.这里$(1+z)^\alpha$是解析函数:当α是正整数时,(4.10)中的级数化为多项式;当 α 是负整数时,(4.10)中级数的收敛半径也是 1.

(4.10)是二项式定理的推广.

对(4.6)—(4.10)进行幂级数的运算,可以推出另外一些初等函数的泰勒展式.

例 4 函数 $\sec z$ 在 $|z|<\frac{\pi}{2}$ 内解析，求它在这圆盘内的泰勒展式.

设在 $|z|<\frac{\pi}{2}$ 内，$\sec z$ 有泰勒展式

$$\sec z=c_0+c_1z+c_2z^2+\cdots+c_nz^n+\cdots,$$

可是在 $|z|<\frac{\pi}{2}$ 内,

$$\sec z=\frac{1}{\cos z}=\frac{1}{1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\cdots}.$$

因此在 $|z|<\frac{\pi}{2}$ 内,

$$1=(c_0+c_1z+c_2z^2+\cdots+c_nz^n+\cdots)\left(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\cdots\right):$$

把上式的右边用级数的乘法算出,并且与左边比较系数,就可求出 $c_n\ (n=0,1,2,\cdots)$. 不难验证,用比较系数法求出 c_n,与用级数 $1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\cdots$ 直接除 1 所得的结果相同，除的法则恰如已给级数是按升幂排列的多项式那样. 计算后即得$\left(\text{在 } |z|<\frac{\pi}{2}\text{ 内}\right)$:

$$\sec z = 1 + \frac{1}{2!} z^2 + \frac{5}{4!} z^4 + \cdots .$$

5. 零点 设函数 $f(z)$在 z_0 的邻域U 内解析,并且$f(z_0)=0$.那么 z_0 称为$f(z)$的零点.设$f(z)$在 U 内的泰勒展式是:

$$f(z)=\alpha_1(z-z_0)+\alpha_2(z-z_0)^2+\cdots+\alpha_n(z-z_0)^n+\cdots .$$

现在可能有下列两种情形:

(1) 如果当 $n=1,2,3,\cdots$ 时,$\alpha_n=0$,那么$f(z)$在 U 内恒等于零.

(2) 如果 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\cdots$ 不全为零,并且对于正整数m,$\alpha_m \neq 0$,而对于 $n<m$,$\alpha_n=0$,那么我们说 z_0 是$f(z)$的 m 阶零点.按照 $m=1$,或$m>1$,我们也说 z_0 是$f(z)$的单零点或 m 重或m阶零点.

如果 z_0 是解析函数$f(z)$的一个 m 阶零点,那么显然在z_0 的一个邻域U 内

$$f(z)=(z-z_0)^m\varphi(z),\ \varphi(z_0)\neq 0, \tag{5.1}$$

其中 $\varphi(z)$在 U 内解析.由(5.1),可以找到一个正数 ε,使得当$0<|z-z_0|<\varepsilon$ 时,$\varphi(z)\neq 0$,于是$f(z)\neq 0$.换句话说,存在着 z_0 的一个邻域, 其中 z_0 是$f(z)$的唯一零点.

结合上述结果,我们有:

定理5.1 设函数$f(z)$在 z_0 解析,并且z_0 是它的一个零点,那么或者$f(z)$在 z_0 的一个邻域内恒等于零,或者存在着z_0 的一个邻域,在其中z_0 是$f(z)$的唯一零点.

上述定理所阐明的后一性质称为零点的孤立性.

6. 解析函数的唯一性 我们知道,已知一般有导数或偏导数的单实变或多实变函数在它的定义范围内某一部分的函数值,完全不能断定同一函数在其他部分的函数值. 解析函数的情形

和这不同:已知某一解析函数在它的定义区域内某些部分的值,同一函数在这区域内其他部分的值就可完全确定.

现证明下列引理:

引理 6.1 设$f(z)$是在区域 D内的解析函数.如果$f(z)$在 D 内的一个圆盘内恒等于零,那么$f(z)$在 D 内恒等于零.

证 设在 D 内一个以 z_0 为心的圆盘K_0内, $f(z)\equiv 0$. 我们只须证明在 K_0以外任一点 $z'\in D$, $f(z')=0$.用在 D 内的曲线 L 连接 z_0 及 z', 存在着一个正数 δ, 使得 L 上任一点与区域 D 的边界上任一点的距离大于δ①.

在 L 上依次取 $z_0, z_1, z_2, \cdots, z_{n-1}, z_n=z'$, 使 $z_1\in K_0$, 而其他任意相邻两点间的距离小于δ; 作每一点 z_j 的 δ 邻域 K_j $(j=1,2,\cdots,n)$(图22). 显然, 当 $j<n$ 时, $z_{j+1}\in K_j\subset D$.

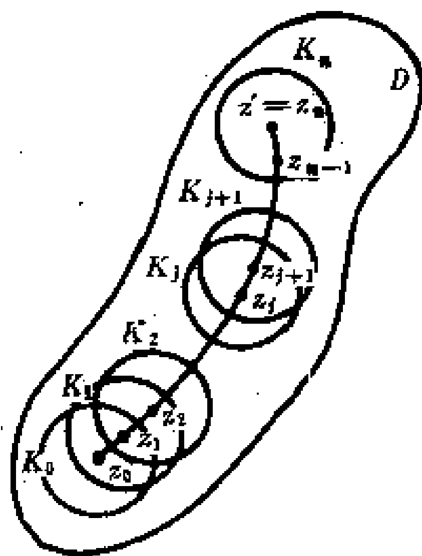


图 22

由于$f(z)$ 在 K_0 内恒等于零, $f^{(n)}(z_1)=0$ $(n=0, 1, 2, \cdots)$. 于是$f(z)$在 K_1 内泰勒展式的系数都是零, 从而$f(z)$在 K_1 内恒等于零. 一般地, 已经证明了$f(z)$在 K_j $(j\leqslant n-1)$ 内恒等于零, 就可推出它在 K_{j+1} 内恒等于零, 而最后就得到$f(z')=0$, 引理得证.

结合引理 6.1 及定理 5.1, 可以立即推出关于零点的一个重要结果:

定理 6.1 如果$f(z)$在区域 D 内解析, 并且不恒等于零, 那么$f(z)$的每个零点 z_0 有一邻域, 在其中 z_0 是 $f(z)$的

① 我们不证明看来比较直观的这一结果, 请参看数学分析教本.

唯一零点.

这一定理是定理 5.1 的推广.

解析函数的唯一性定理可叙述如下:

定理 6.2　设函数$f(z)$及$g(z)$在区域D内解析.设z_k是D内彼此不同的点($k=1,2,3,\cdots$),并且点列$\{z_k\}$在D内有极限点.如果$f(z_k)=g(z_k)(k=1,2,\cdots)$,那么在$D$内,$f(z)=g(z)$.

证　假定这一定理的结论不成立,亦即在D内,解析函数$F(z)=f(z)-g(z)$不恒等于零.显然$F(z_k)=0(k=1,2,3,\cdots)$.设z_0是点列$\{z_k\}$在D内的极限点.由于$F(z)$在z_0连续,可见$F(z_0)=0$.可是这时找不到z_0的一个邻域,在其中z_0是$F(z)$的唯一零点,与定理 6.1 中的结论相矛盾.定理6.2 得证.

例 1　在复平面上解析、在实轴上等于 $\sin x$ 的函数只可能是 $\sin z$.

设函数$f(z)$在复平面上解析,并且在实轴上等于 $\sin x$,那么在复平面上解析的函数$f(z)-\sin z$ 在实轴上等于零,因而由定理6.2,在复平面上,$f(z)-\sin z=0$,亦即$f(z)=\sin z$.

我们注意,在第 3 段例1 及例2 中,有关幂级数的和函数在其收敛圆上某些点处解析.由定理6.2,对于这两例,都不存在另一解析函数,在收敛圆内与和函数恒等,而在收敛圆上和函数为解析的点的邻域内,与它不恒等.

例 2　是否存在着在原点解析的函数$f(z)$满足下列条件:

$$(1)\ f\left(\frac{1}{2n-1}\right)=0,\ f\left(\frac{1}{2n}\right)=\frac{1}{2n};$$

$$(2)\ f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{n}{n+1},$$

其中 $n=1,2,3,\cdots$.

考虑(1). 由于 $\left\{\frac{1}{2n-1}\right\}$ 及 $\left\{\frac{1}{2n}\right\}$ $(n=1,2,3,\cdots)$都以 0 为聚点，由定理 6.2, $f(z)=z$ 是在原点解析并满足 $f\left(\frac{1}{2n}\right)=\frac{1}{2n}$ 的唯一函数; 但这函数不满足条件 $f\left(\frac{1}{2n-1}\right)=0$ $(n=1,2,3,\cdots)$. 因此在原点解析并满足(1)中条件的函数不存在.

其次考虑(2). 我们有 $f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{1+1/n}$. 由定理 6.2, $f(z)=\frac{1}{1+z}$ 是在原点解析并满足条件(2)的唯一函数.

§3. 罗朗展式

7. 解析函数的罗朗展式 在本节中，我们讲述解析函数的另一种重要的级数展式，即在圆环内解析函数的一种级数展式. 首先考虑级数

$$\beta_0+\beta_{-1}(z-z_0)^{-1}+\beta_{-2}(z-z_0)^{-2}+\cdots+\beta_{-n}(z-z_0)^{-n}+\cdots, \tag{7.1}$$

在这里 $z_0,\beta_0,\beta_{-1},\cdots,\beta_{-n}\cdots$ 是复常数. 级数(7.1)可以看作变数 $\frac{1}{(z-z_0)}$ 的幂级数; 设这幂级数的收敛半径是 R. 如果 $0<R<+\infty$, 那么不难看出，级数(7.1)在 $|z-z_0|>\frac{1}{R}$ 内

绝对收敛并且内闭一致收敛，在$|z-z_0|<\dfrac{1}{R}$内发散. 同样，如果$R=+\infty$，那么级数(7.1)在$|z-z_0|>0$内绝对收敛并且内闭一致收敛. 如果$R=0$,那么级数(7.1)在每一点发散. 在上列情形下， 级数(7.1)在$z=z_0$没有意义. 于是根据定理2.3,按照不同情形,级数(7.1)分别在$|z-z_0|>\dfrac{1}{R}=R_1\ (0<R<+\infty)$及$|z-z_0|>0$内收敛于一解析函数.

更一般地，考虑级数

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\beta_n(z-z_0)^n, \tag{7.2}$$

这里$z_0,\beta_n(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$都是复常数. 当级数

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\beta_n(z-z_0)^n \text{ 及} \sum_{n=-1}^{-\infty}\beta_n(z-z_0)^n \tag{7.3}$$

都收敛时，我们说级数(7.2)收敛，并且它的和函数等于(7.3)中两级数的和函数相加. 设(7.3)中第一个级数在$|z-z_0|<R_2$内绝对收敛并且内闭一致收敛，第二个级数在$|z-z_0|>R_1$内绝对收敛并且内闭一致收敛，于是两级数的和函数分别在$|z-z_0|<R_2$及$|z-z_0|>R_1$内解析. 又设$R_1<R_2$,那么(7.3)中两级数都在圆环$D:R_1<|z-z_0|<R_2$内绝对收敛并且内闭一致收敛，于是我们说级数(7.2)在这圆环内绝对收敛并且内闭一致收敛;显然它的和函数是一解析函数. 级数(7.2)称为罗朗级数. 幂级数(3.1)及级数(7.1)都可看作它的特例.

上面已讲到罗朗级数(7.2)的和函数是在圆环D内的解析函数. 现在我们证明:

定理 7.1 设函数$f(z)$在圆环 $D: R_1<|z-z_0|<R_2(0\leqslant R_1<R_2\leqslant+\infty)$内解析，那么在 D内，

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\alpha_n(z-z_0)^n, \tag{7.4}$$

这里

$$\alpha_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz \quad (n=0, \pm1, \pm2, \cdots), \tag{7.5}$$

γ 是圆 $|z-z_0|=\rho$，ρ 是一个满足 $R_1<\rho<R_2$ 的任何数.

证 设z是圆环D内任一点，在D内作圆环D'：$R_1'<|z-z_0|<R_2'$，使得$z\in D'$；这里$R_1<R_1'<R_2'<R_2$. 用Γ_1'及Γ_2'分别表示圆$|z-z_0|=R_1'$及$|z-z_0|=R_2'$(图 23). 由于$f(\zeta)$在闭圆环$\overline{D'}$上解析，根据柯西定理，

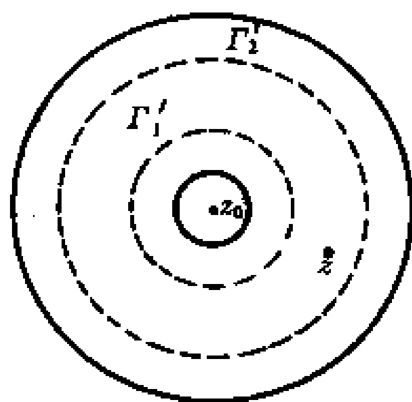


图 23

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2'}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1'}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta. \tag{7.6}$$

当$\zeta\in\Gamma_2'$时，级数

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{(\zeta-z_0)-(z-z_0)}=\frac{1}{(\zeta-z_0)\left(1-\dfrac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)}$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}} \tag{7.7}$$

一致收敛；而当$\zeta\in\Gamma_1'$时，级数

$$-\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{(z-z_0)\left(1-\dfrac{\zeta-z_0}{z-z_0}\right)}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\zeta-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}} \tag{7.8}$$

一致收敛．把(7.7)及(7.8)分别代入(7.6)，然后逐项积分，我们就可看到$f(z)$有展式(7.4)，其中

$$\alpha_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2'}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\qquad(n=0,1,2,\cdots), \tag{7.9}$$

$$\alpha_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1'}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z_0)^{-n+1}}\qquad(n=1,2,3,\cdots). \tag{7.10}$$

由柯西定理，在(7.9)及(7.10)中的积分可以换成沿圆γ的积分；于是我们最后得到(7.5)．

根据定理 7.1，级数(7.4)在圆环D内收敛．

在级数(7.4)中，$\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\alpha_n(z-z_0)^n$称为这级数的解析部分，而$\sum\limits_{n=-1}^{-\infty}\alpha_n(z-z_0)^n$称为它的主要部分．

在定理 7.1 中，级数(7.4)称为$f(z)$在圆环D内的罗朗展式．反之，可以证明：

定理 7.2 设罗朗级数(7.2)在圆环 $D: R_1 < |z-z_0| < R_2$ $(0 \leqslant R_1 < R_2 \leqslant +\infty)$ 中内闭一致收敛于和函数 $g(z)$，那么(7.2)就是 $g(z)$ 在D 内的罗朗展式：

$$g(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \beta_n (z-z_0)^n. \tag{7.11}$$

证 现在把系数 β_n 用 $g(z)$ 计算出来. 在 D 内任取一圆 γ: $|z-z_0|=\rho\,(R_1<\rho<R_2)$. 用 $\dfrac{1}{2\pi i}(z-z_0)^{-k-1}$ 乘(7.11)的两边，然后沿 γ 求积分. 由于(7.11)中的级数在γ 上一致收敛，在求积分时对有关级数可以逐项积分. 于是我们有:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{g(z)}{(z-z_0)^{k+1}}\,dz=\sum_{-\infty}^{+\infty} \beta_n \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}(z-z_0)^{n-k-1}\,dz=\beta_k$$

$$(k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots), \tag{7.12}$$

这是因为(7.12)中求和记号 $\sum\limits_{-\infty}^{+\infty}$ 后各项只有在 $n=k$ 时不为零. (7.12)与(7.5)一致. 证完.

(7.12)表明了罗朗级数(7.11)的系数可以用它的和函数算出. 因此 $g(z)$ 在 D 内不可能有另一形如

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \gamma_n (z-z_0)^n \tag{7.13}$$

的罗朗展式. 把这一结果与定理 7.1 相结合，就有:

系 7.1 在定理 7.1 的假设下，$f(z)$在D 内的罗朗展式(7.4)是唯一的.

这一性质称为解析函数的罗朗展式的唯一性.

由(4.6)—(4.10)以及幂级数的运算，可以推出一些初等函数的罗朗级数展式.

例 1 求函数 $\frac{1}{(z-1)(z-2)}$ 分别在圆环 $1<|z|<2$ 及 $2<|z|<+\infty$ 内的罗朗级数展式.

如果 $1<|z|<2$，那么

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}=\frac{-1}{2\left(1-\frac{z}{2}\right)}$$

$$-\frac{1}{z\left(1-\frac{1}{z}\right)}=-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{z^n}.$$

如果 $2<|z|<+\infty$，那么

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z\left(1-\frac{2}{z}\right)}$$

$$-\frac{1}{z\left(1-\frac{1}{z}\right)}=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{2^{n-1}-1}{z^n}.$$

这一例子说明，同一函数在不同的圆环内的罗朗展式不同.

例 2 $\frac{\sin z}{z^2}$ 及 $\frac{\sin z}{z}$ 在 $0<|z|<+\infty$ 内的罗朗级数展式是:

$$\frac{\sin z}{z^2}=\frac{1}{z}-\frac{z}{3!}+\frac{z^3}{5!}-\cdots+\frac{(-1)^n z^{2n-1}}{(2n+1)!}+\cdots,$$

$$\frac{\sin z}{z}=1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\cdots+\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n+1)!}+\cdots.$$

例 3 $e^{\frac{1}{z}}$ 在 $0<|z|<+\infty$ 内的罗朗级数展式是:

$$e^{\frac{1}{z}}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!}\frac{1}{z^2}+\cdots+\frac{1}{n!}\frac{1}{z^n}+\cdots.$$

8. 解析函数的孤立奇点 在第 7 段中，我们已经研究了在一般圆环内解析函数的罗朗展式. 现在讨论一种特殊情形.

我们设函数 $f(z)$ 在去掉圆心的圆盘 $D: 0<|z-z_0|<R\,(0<R\leqslant+\infty)$ 内确定并且解析，那么 z_0 称为$f(z)$的孤立奇点. 在 D 内，$f(z)$ 有罗朗展式

$$f(z)=\sum_{-\infty}^{+\infty}\alpha_n(z-z_0)^n, \tag{8.1}$$

其中

$$\alpha_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta \quad (n=0,\pm1,\pm2,\cdots), \tag{8.2}$$

C_ρ 是圆 $|z-z_0|=\rho\,(0<\rho<R)$.

例如在上段例 2 及例3 中，0 是 $\frac{\sin z}{z}$，$\frac{\sin z}{z^2}$ 及 $e^{\frac{1}{z}}$ 的孤立奇点.

一般地，对于上述函数 $f(z)$，按照它的罗朗展式含负数幂

的情况，可以把孤立奇点分类如下：

(1) 如果当 $n=-1,-2,-3,\cdots$ 时，$\alpha_n=0$，那么我们说 z_0 是函数 $f(z)$ 的可去奇点，或者说 $f(z)$ 在 z_0 有可去奇点．这是因为令 $f(z_0)=\alpha_0$，就得到在整个圆盘 $|z-z_0|<R$ 内解析的函数 $f(z)$．

(2) 如果只有有限个(至少一个)整数 $n<0$，使得 $\alpha_n\neq 0$，那么我们说 z_0 是函数 $f(z)$ 的极点．设对于正整数 m，$\alpha_{-m}\neq 0$；而当 $n<-m$ 时，$\alpha_n=0$．那么我们就说 z_0 是 $f(z)$ 的 m 阶极点．按照 $m=1$ 或 $m>1$，我们也说 z_0 是 $f(z)$ 的单极点或 m 重极点．

(3) 如果有无限个整数 $n<0$，使得 $\alpha_n\neq 0$，那么我们说 z_0 是 $f(z)$ 的本性奇点．

例如在上段例 2 及例 3 中，0 分别是 $\dfrac{\sin z}{z}$，$\dfrac{\sin z}{z^2}$ 及 $e^{\frac{1}{z}}$ 的可去奇点、单极点及本性奇点．

现在我们来研究这些孤立奇点的特征．先证明：

定理 8.1 设函数 $f(z)$ 在 $0<|z-z_0|<R\ (0<R\leqslant+\infty)$ 内解析，那么 z_0 是 $f(z)$ 的可去奇点的必要与充分条件是：存在着极限 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=\alpha_0$，其中 α_0 是一复数．

证 先证条件的必要性．由假设，在 $0<|z-z_0|<R$ 内，$f(z)$ 有罗朗级数展式：

$$f(z)=\alpha_0+\alpha_1(z-z_0)+\cdots+\alpha_n(z-z_0)^n+\cdots,$$

因为上式右边幂级数的收敛半径至少是 R，所以它的和函数在 $|z-z_0|<R$ 内解析．于是显然存在着 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=\alpha_0$．

再证条件的充分性．设在 $0<|z-z_0|<R$ 内，$f(z)$ 的罗朗级数展式是(8.1)．由假设，存在着两个正数 M 及 $\rho_0(\leqslant R)$，使得

在 $0<|z-z_0|<\rho_0$ 内，

$$|f(z)|<M,$$

那么在(8.2)中取 ρ，使 $0<\rho<\rho_0$，我们有

$$|\alpha_n|\leqslant \frac{1}{2\pi} M \frac{2\pi\rho}{\rho^{n+1}} = \frac{M}{\rho^n}, \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots). \quad (8.3)$$

当 $n=-1, -2, -3, \cdots$ 时，在(8.3)中令 ρ 趋近于 0，就得到 $\alpha_n=0$ $(n=-1, -2, -3, \cdots)$. 于是 z_0 是 $f(z)$ 的可去奇点. 条件的充分性得证.

由定理 8.1 可立即推出：

系 8.1 在定理 8.1 的假设下，z_0 是 $f(z)$ 的可去奇点的必要与充分条件是：存在着某一正数 $\rho_0\leqslant R$，使得 $f(z)$ 在 $0<|z-z_0|<\rho_0$ 内有界.

其次，我们研究极点的特征. 设函数 $f(z)$ 在 $0<|z-z_0|<R$ 内解析，且 z_0 是 $f(z)$ 的 $m(\geqslant 1)$ 阶极点. 那么在 $0<|z-z_0|<R$ 内，$f(z)$ 有罗朗展式：

$$f(z)=\frac{\alpha_{-m}}{(z-z_0)^m}+\frac{\alpha_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}}+\cdots+\frac{\alpha_{-1}}{z-z_0}$$

$$+\alpha_0+\alpha_1(z-\alpha)+\cdots+\alpha_n(z-z_0)^n+\cdots,$$

在这里 $\alpha_{-m}\neq 0$. 于是在 $0<|z-z_0|<R$ 内，

$$f(z)=\frac{1}{(z-z_0)^m}[\alpha_{-m}+\alpha_{-m+1}(z-z_0)+\cdots+\alpha_0(z-z_0)^m$$

$$+\cdots+\alpha_n(z-z_0)^{n+m}+\cdots]=\frac{1}{(z-z_0)^m}\varphi(z), \quad (8.4)$$

在这里 $\varphi(z)$是一个在 $|z-z_0|<R$ 内解析的函数，并且 $\varphi(z_0)\neq 0$. 反之，如果函数 $f(z)$ 在 $0<|z-z_0|<R$ 内可以表示成为 (8.4) 右边的形状，而 $\varphi(z)$是在 $|z-z_0|<R$ 内解析的函数，并且 $\varphi(z_0)\neq 0$，那么不难推出：z_0 是 $f(z)$的 m 阶极点.

由 (8.4) 可以证明:

定理 8.2 设函数 $f(z)$ 在 $0<|z-z_0|<R\,(0<R\leqslant+\infty)$ 内解析，那么 z_0 是 $f(z)$ 的极点的必要与充分条件是 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=\infty$.

证 由 (8.4)，条件的必要性是明显的. 现在来证明它的充分性. 在这定理的假设下，存在着某一正数 $\rho_0\leqslant R$，使得在 $0<|z-z_0|<\rho_0$ 内，$f(z)\neq 0$，于是 $F(z)=\dfrac{1}{f(z)}$ 在 $0<|z-z_0|<\rho_0$ 内解析，不等于零，而且 $\lim\limits_{z\to z_0}F(z)=\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{1}{f(z)}=0$. 因此 z_0 是 $F(z)$的一个可去奇点，从而在 $0<|z-z_0|<\rho_0$ 内，$F(z)$有罗朗级数展式:

$$F(z)=\beta_0+\beta_1(z-z_0)+\cdots+\beta_n(z-z_0)^n+\cdots,$$

我们有 $\beta_0=\lim\limits_{z\to z_0}F(z)=0$. 由于在 $0<|z-z_0|<\rho_0$ 内，$F(z)\neq 0$，由定理 5.1，可以设 $\beta_0=\beta_1=\cdots=\beta_{m-1}=0$，$\beta_m\neq 0$. 由此得 $F(z)=(z-z_0)^m\Phi(z)$，其中 $\Phi(z)$在 $|z-z_0|<\rho_0$ 内解析，并且不等于零($\Phi(z_0)=\beta_m\neq 0$). 于是在 $0<|z-z_0|<\rho_0$ 内，

$$f(z)=\frac{1}{(z-z_0)^m}\varphi(z),$$

在这里 $\varphi(z)=\dfrac{1}{\Phi(z)}$ 在 $|z-z_0|<\rho_0$ 内解析，$\varphi(z_0)=\alpha_{-m}$

$= \dfrac{1}{\beta_m} \neq 0$. 因此 z_0 是 $f(z)$的 m 阶极点.

由定理 8.2 的证明，不难推出：

系 8.2　在定理 8.2 的假设下，z_0 是 $f(z)$ 的 m 阶极点的必要与充分条件是：$\lim\limits_{z \to z_0}(z-z_0)^m f(z) = \alpha_{-m}$，在这里 m 是一正整数，α_{-m} 是一个不等于零的复数.

定理 8.1 及 8.2 中的必要与充分条件可以分别说成是存在有限或无穷的极限 $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$. 结合这两定理，我们有：

定理 8.3　设函数 $f(z)$ 在 $0<|z-z_0|<R\ (0<R\leqslant+\infty)$内解析，那么 z_0是 $f(z)$ 的本性奇点的必要与充分条件是：不存在有限或无穷的极限 $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$.

例　0 是函数 $e^{\frac{1}{z}}$ 的本性奇点. 不难看出，$\lim\limits_{z \to 0} e^{\frac{1}{z}}$ 不存在.

事实上，当 z 沿正实轴趋近于零时，$e^{\frac{1}{z}}$ 趋近于 ∞；当 z 沿负实轴趋近于零时，$e^{\frac{1}{z}}$ 趋近于零；当 z 沿虚轴趋近于零时，$e^{\frac{1}{z}}$ 没有极限.

由定理 8.1—8.3，$f(z)$的孤立奇点 z_0究竟是可去奇点、极点或本性奇点，可由 $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$是否存在等情况来确定. 外尔斯特拉斯进一步阐明了本性奇点的性质，证明了下列重要定理：

定理 8.4　设函数 $f(z)$ 在 $0<|z-z_0|<R\ (0<R\leqslant+\infty)$ 内解析，那么 z_0 是 $f(z)$的本性奇点的必要与充分条件是：对于任何有限或无穷的复数 γ，在 $0<|z-z_0|<R$ 内一定有收敛于 z_0 的序列 $\{z_n\}$，使得 $\lim\limits_{n \to +\infty} f(z_n) = \gamma$.

证 由定理 8.1 及 8.2，这定理中条件的充分性是明显的．现在来证明必要性．如果 $\gamma=\infty$，有关条件显然成立．因为 z_0 不是 $f(z)$ 的可去奇点，从而 $f(z)$ 在任何开域 $0<|z-z_0|<\rho\ (\leqslant R)$ 内不能有界．设 γ 是有限复数．只须证明，对任何 $\varepsilon>0$ 及 $\rho>0\ (\rho\leqslant R)$，在 $0<|z-z_0|<\rho$ 内，总有一点 z'，使得 $|f(z')-\gamma|<\varepsilon$．假定这一命题不成立；亦即存在着某两正数 ε_0 及 $\rho_0\ (\leqslant R)$，使得在 $0<|z-z_0|<\rho_0$ 内，$|f(z)-\gamma|\geqslant\varepsilon_0$．于是函数

$$g(z)=\frac{1}{f(z)-\gamma}$$

在 $0<|z-z_0|<\rho_0$ 内解析、有界并且不等于零．因此 z_0 是 $g(z)$ 的可去奇点，亦即

$$g(z)=(z-z_0)^n\psi(z),$$

在这里 n 是一个非负整数，函数 $\psi(z)$ 在 $|z-z_0|<\rho$ 内解析，并且 $\lim\limits_{z\to z_0}\psi(z)\neq 0$．由此可见，$\dfrac{1}{g(z)}$ 在 $z=z_0$ 有可去奇点或极点．

由于在 $0<|z-z_0|<\rho_0$ 内，

$$f(z)=\gamma+\frac{1}{g(z)},$$

于是 $f(z)$ 在 $z=z_0$ 有可去奇点或极点，与假设相矛盾．定理证完．

关于本性奇点，毕卡证明了一个更加深刻的定理：

定理 8.5 设函数 $f(z)$ 在 $0<|z-z_0|<R\ (0<R\leqslant+\infty)$ 内解析，

那么 z_0 是 $f(z)$ 的本性奇点的必要与充分条件是：对于任何复数 $\gamma\neq\infty$，至多可能有一个例外，在 $0<|z-z_0|<R$ 内，一定有一个收敛于 z_0 的序列 $\{z_n\}$，使得 $f(z_n)=\gamma$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$[1]．

例　0是 $e^{\frac{1}{z}}$ 的本性奇点．不难直接证明：对于任何 $\varepsilon>0$ 及任何复数 $\gamma(\neq 0$ 及 $\infty)$，在 $0<|z|<\varepsilon$ 内必有一点 z'，使得 $f(z')=\gamma$．

从上世纪末到本世纪，从毕卡定理出发，对于解析函数的值的分布及有关问题，曾经有过大量的研究工作．我国老一辈的数学工作者熊庆来、庄圻泰等在这方面得到了许多重要成果，较年轻的数学工作者杨乐、张广厚等继往开来，在这方面进一步作出了一些首创性的贡献，受到世界数学工作者的重视．

9．解析函数在无穷远点的性质　设函数 $f(z)$ 在区域 $R<|z|<+\infty$ $(R\geqslant 0)$ 内解析，那么无穷远点称为 $f(z)$ 的孤立奇点．在这区域内，$f(z)$ 有罗朗级数展式：

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\alpha_n z^n, \tag{9.1}$$

其中 α_n 由与(8.2)相类似的公式确定．

令 $z=\dfrac{1}{w}$，按照 $R>0$ 或 $R=0$，我们得到在 $0<|w|<\dfrac{1}{R}$ 或 $0<|w|<+\infty$ 内解析的函数 $\varphi(w)=f\left(\dfrac{1}{w}\right)$，其罗朗级数

---

[1] 这定理的证明可参看 И．И．普里瓦洛夫著，闵嗣鹤、程民德等译，复变函数引论，高等教育出版社．

展式是：

$$\varphi(w)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{\alpha_n}{w^n},\tag{9.2}$$

如果 $w=0$ 是 $\varphi(w)$ 的可去奇点、(m 阶)极点或本性奇点，那么分别说 $z=\infty$ 是 $f(z)$ 的可去奇点、(m 阶)极点或本性奇点．这样，

(1) 如果当 $n=1, 2, 3, \cdots$ 时，$\alpha_n=0$，那么 $z=\infty$ 是函数 $f(z)$的可去奇点.

(2) 如果只有有限个(至少一个)整数 $n>0$，使得 $\alpha_n\neq 0$，那么 $z=\infty$ 是$f(z)$的极点．设对于正整数 m，$\alpha_m\neq 0$；而当 $n>m$ 时，$\alpha_n=0$，那么 $z=\infty$ 是$f(z)$的(m阶)极点．按照 $m=1$ 或 $m>1$，我们也说 $z=\infty$ 是$f(z)$的单极点或m 重极点.

(3) 如果有无穷个整数 $n>0$，使得 $\alpha_n\neq 0$，那么 $z=\infty$ 是 $f(z)$ 的本性奇点.

与级数(9.2)的情形相对应，$\sum_{n=0}^{-\infty}\alpha_n z^n$ 及 $\sum_{n=1}^{+\infty}\alpha_n z^n$ 分别称为级数(9.1)的解析部分及主要部分.

按照第二章，习题二第 13 题中引进的定义，在上列情形(1)，我们说$f(z)$在无穷远点解析.

定理 8.1—8.3 以及系 8.1 都可立即转移到无穷远点的情形．例如我们有：

定理 9.1　设函数$f(z)$在区域 $R<|z|<+\infty$ ($R\geqslant 0$)内解析，那么 $z=\infty$ 是$f(z)$的可去奇点、极点或本性奇点的必要与充分条件是：存在着有限、无穷极限 $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)$或不存在有限或无穷的

极限 $\lim_{z\to\infty} f(z)$.

系 9.1 设函数 $f(z)$在区域 $R<|z|<+\infty$ $(R\geqslant 0)$内解析，那么 $z=\infty$ 是$f(z)$的可去奇点的必要与充分条件是：存在着某一数$\rho_0\geqslant R$，使得 $f(z)$在 $\rho_0<|z|<+\infty$ 内有界.

上列定理及系的证明以及其他有关结果及其证明，请读者自己作出.

外尔斯特拉斯定理 8.4 和毕卡定理 8.5 都可转移到$z=\infty$是本性奇点情形，现从略.

§4. 整函数与亚纯函数

10. 整函数与亚纯函数概念 如第三章第 4 段中所已指出，如果$f(z)$在有限复平面$\mathbb{C}$上解析，那么它就称为一个整函数，显然，无穷远点是整函数的孤立奇点. 在$\mathbb{C}$上，$f(z)$围绕原点的罗朗展式也就是泰勒展式:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\alpha_n z^n. \tag{10.1}$$

当$f(z)$恒等于一个常数时，无穷远点是它的可去奇点；当$f(z)$是n $(\geqslant 1)$次多项式时，无穷远点是它的n阶极点；在其他情况下，无穷远点是$f(z)$的本性奇点，而这时$f(z)$称为一个超越整函数. 例如e^z、$\sin z$ 及 $\cos z$ 都是超越整函数，并且无穷远点是它们的本性奇点.

关于整函数，由系 9.1 也可立即推出重要的刘维尔定理，即第三章，定理 4.4.

由刘维尔定理可以证明

代数基本定理：任何 n $(\geqslant 1)$次代数方程至少有一根.

证 设

$$P(z)=\alpha_n z^n+\alpha_{n-1}z^{n-1}+\cdots+\alpha_0=0 \qquad (\alpha_n\neq 0)$$

是一个这样的代数方程.我们要证明整函数 $P(z)$ 至少有一零点.

假定 $P(z)$没有零点，那么 $\frac{1}{P(z)}$ 也是一个整函数. 因为

$$|P(z)|=\left|z^n\left(\alpha_n+\frac{\alpha_{n-1}}{z}+\cdots+\frac{\alpha_0}{z^n}\right)\right|$$

$$\geqslant|z|^n\left(|\alpha_n|-\frac{|\alpha_{n-1}|}{|z|}-\cdots-\frac{|\alpha_0|}{|z|^n}\right)\qquad(z\neq0),$$

所以我们有

$$\lim_{z\to\infty}|P(z)|=+\infty,\quad\lim_{z\to\infty}\frac{1}{P(z)}=0,$$

因而 $\frac{1}{P(z)}$ 在全平面上有界. 于是根据刘维尔定理，$\frac{1}{P(z)}$ 恒等于零，与所设相矛盾. 因此 $P(z)$至少有一零点.

应用刘维尔定理，还可证明:

定理 10.1 设$f(z)$是一整函数. 按照$z=\infty$ 是可去奇点、极点或本性奇点，那么 $f(z)$是恒等于一个常数、多项式或超越整函数.

证 设 $z=\infty$ 是$f(z)$的可去奇点，那么 $\lim\limits_{z\to\infty}f(z)$为有限复数，从而$f(z)$有界，由刘维尔定理，$f(z)$恒等于一个常数.

当 $z=\infty$ 是$f(z)$ 的极点或本性奇点时，设$f(z)$在 $z=\infty$ 的主要部分是

$$g(z)=\sum_{k=1}^{n}\alpha_kz^k \text{ 或 } \sum_{k=1}^{+\infty}\alpha_kz^k,$$

那么 $z=\infty$ 是 $f(z)-g(z)$的可去奇点. 因此 $f(z)=g(z)+C$,

其中 C 为一个常数. 证完.

如果函数 $f(z)$ 在有限复平面上除去有极点外,到处解析,那么它就称为一个亚纯函数.亚纯函数是整函数的推广,它可能有无穷个极点.例如 $\frac{1}{\sin z}$ 是一个亚纯函数,它有极点 $z=k\pi(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$.有理函数

$$\frac{\alpha_0+\alpha_1 z+\alpha_2 z^2+\cdots+\alpha_n z^n}{\beta_0+\beta_1 z+\beta_2 z^2+\cdots+\beta_m z^m} \qquad (\alpha_n,\beta_m\neq 0)$$

也是一个亚纯函数,它在有限复平面上有有限个极点,而无穷远点是它的极点(当 $n>m$ 时)或可去奇点(当 $n\leqslant m$ 时),在这里 α_k 及 β_l $(k=0,1,2,\cdots,n;\ l=0,1,2,\cdots,m)$ 是复常数,m 及 n 是正整数.

现证明下列逆定理:

定理 10.2 如果无穷远点是亚纯函数 $f(z)$ 的可去奇点或极点,那么 $f(z)$ 是一个有理函数.

证 如果无穷远点是 $f(z)$ 的可去奇点或极点,那么可找到一个有限的 R,使得 $f(z)$ 在 $<R<|z|<+\infty$ 内解析.在 $|z|\leqslant R$ 上,$f(z)$ 只可能有有限个极点,因为否则极点的极限点既不是极点,而且函数也不可能在这点解析,这是不可能的.因此 $f(z)$ 只可能有有限个极点,设为 $z_1,z_2,\cdots,z_p$;此外,无穷远点是可去奇点或极点.在每一个极点附近把 $f(z)$ 展开成罗朗级数,并且设在点 z_λ 的主要部分是:

$$h_\lambda(z)=\frac{c_{-1}^{(\lambda)}}{z-z_\lambda}+\frac{c_{-2}^{(\lambda)}}{(z-z_\lambda)^2}+\cdots+\frac{c_{-\alpha_\lambda}^{(\lambda)}}{(z-z_\lambda)^{\alpha_\lambda}}$$

$$(\lambda=1,2,3,\cdots,p);$$

当无穷远点是极点时,在这点的主要部分是

$$g(z)=A_1z+A_2z^2+\cdots+A_qz^q;$$

而当无穷远点是可去奇点时，令 $g(z)\equiv 0$.

令

$$F(z)=f(z)-R(z),$$

其中 $R(z)=h_1(z)+h_2(z)+\cdots+h_p(z)+g(z)$是一个有理函数.函数$F(z)$除去 $z_1,z_2,\cdots,z_p$ 与∞ 有可去奇点外,在其余各点解析;这是因为由于展式的唯一性,$F(z)$在 $z_1,z_2,\cdots,z_p$ 及∞ 附近的罗朗展式都不包含主要部分.因此,令

$$F(z_\lambda)=\lim_{z\to z_\lambda}F(z)\ (\lambda=1,2,3,\cdots,p),$$

$F(z)$就是一个有界整函数. 由刘维尔定理, $F(z)=C$(常数),从而 $f(z)=R(z)+C$. 证完.

***11. 无穷乘积** 一般整函数可以看作是多项式的推广.我们知道,多项式可以按照其零点分解成有限个因子的乘积.这一结果也可推广到有无穷个零点的整函数,即可把它按其零点分解成无穷个因子的乘积.为此,我们先引进无穷乘积的定义及一些性质.

已给一复数序列$\{p_k\}$. 设 $\forall k\in\mathbb{N}-\{0\}$, $p_k\neq 0$. 如果当 $n\to+\infty$ 时, 部分乘积

$$P_n=\prod_{k=1}^{n}p_k\to P\neq 0,$$

那么我们说无穷乘积

$$\prod_{k=1}^{+\infty}p_k \tag{11.1}$$

收敛于值 P.

显然，$\prod_{k=1}^{n} p_k = \exp(\sum_{k=1}^{n} \ln p_k)$[1]．我们在上述定义中规定 $p_k \neq 0$ 及 $P \neq 0$，是为了把无穷乘积(11.1)及级数 $\Sigma \ln p_k$ 相对照进行研究；而且在序列 $\{p_k\}$ 中只要有一元素为零，那么 $\{P_n\}$ 的极限必然是零.

当(11.1)收敛时，我们有

$$\frac{P_{n+1}}{P_n} = p_{n+1} \to \frac{P}{P} = 1 \quad (n \to +\infty)$$

亦即

$$\lim_{n \to +\infty} p_n = 1 . \tag{11.2}$$

因此 (11.2)是(11.1)收敛的一个必要条件.

把 p_k 记作 $1 + a_k \neq 0$. 于是(11.1)可写成

$$\prod_{k=1}^{+\infty} (1 + a_k) , \tag{11.1'}$$

而且这一无穷乘积收敛的必要条件是

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = 0 .$$

关于(11.1′)的收敛性，有下列定理：

定理 11.1　设 $\forall k \in \mathbb{N} - \{0\}$，复数 $1 + a_k \neq 0$，那么无穷乘积(11.1′)与级数

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \ln(1 + a_k) \tag{11.3}$$

---

① e^z 可记作$\exp(z)$或$\exp z$.

同时收敛或同时发散，这里

$$\ln(1+a_k)=\ln|1+a_k|+i\arg(1+a_k), \tag{11.4}$$

而且

$$-\pi<\arg(1+a_k)\leqslant\pi \tag{11.5}$$

证 设(11.3)收敛于 S，并且把它前几项的部分和表示为 S_n，那么 $S_n\to S(n\to+\infty)$，从而

$$P_n=\prod_{k=1}^{n}(1+a_k)=e^{S_n}\to e^S\neq 0\,(n\to+\infty),$$

即(11.1′)收敛．

相反地，设(11.1′)收敛，即 $P_n\to P\neq 0\ (n\to+\infty)$．级数(11.3)的各项满足条件(11.4)及(11.5). 显然，S_n 等于 P_n 的对数的一个值. 我们要证明，(11.3)收敛于 P 的对数的一个值，但是这时 P_n 及 P 的对数的虚部不一定满足(11.4)及(11.5)型的条件. 为方便计，用 ln 及arg 表示满足这种类型条件的对数及其虚部.

由于 $P_n/P\to 1$，我们有 $\ln(P_n/P)\to 0\,(n\to+\infty)$．于是 $\exists\, h_n\in\mathbb{N}$，使得

$$\ln(P_n/P)=S_n-\ln P+2h_n\pi i,$$

从而

$$\begin{aligned}\ln(P_{n+1}/P)-\ln(P_n/P)&=S_{n+1}-S_n+2(h_{n+1}-h_n)\pi i\\&=\ln(1+a_n)+2(h_{n+1}-h_n)\pi i.\end{aligned}$$

因此

$$\arg(P_{n+1}/P)-\arg(P_n/P)=\arg(1+a_n)+2(h_{n+1}-h_n)\pi i. \tag{11.6}$$

因为当 $n\to+\infty$ 时,(11.6)的左边趋近于零,又因(11.5)成立,所以对于充分大的 n,(11.6)只有在 $h_{n+1}=h_n$ 时才可能成立.于是对于充分大的n,h_n等于一个固定的整数h,从而由

$$\ln(P_n/P)=S_n-\ln P+2h\pi i$$

即得

$$S_n\to\ln P+2h\pi i(n\to+\infty)$$

证完.

定理 11.1 说明无穷乘积的收敛问题可归结为级数的收敛问题.如果级数(11.3)绝对收敛,我们说无穷乘积(11.1′)绝对收敛.由于这时级数(11.3)收敛,无穷乘积(11.1′)也收敛.关于无穷乘积的绝对收敛性,我们有更简单的判别法.

定理 11.2 无穷乘积 (11.1′)绝对收敛的必要与充分条件是级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 绝对收敛.

证 由本章(4.9)式,当 $|z|<1$ 时,

$$\left|1-\frac{\ln(1+z)}{z}\right|=\left|\frac{1}{2}z-\frac{1}{3}z^2+\cdots\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{2}(|z|+|z|^2+\cdots)=\frac{1}{2}\frac{|z|}{1-|z|},$$

这里对数取的是主值枝的值.于是当$|z|<\frac{1}{2}$ 时,

$$\frac{1}{2}|z|<|\ln(1+z)|<\frac{3}{2}|z|. \qquad (11.7)$$

由此就可完成定理的证明.

我们现在研究因子是解析函数的无穷乘积.

引理 11.1 设 $\{u_k(z)\}$ 是在区域 D 内解析函数的序列,

并且在 D 内，$1+u_k(z)\neq 0(k\in\mathbb{N}-\{0\})$．如果级数 $\sum|u_k(z)|$ 在 D 内内闭一致收敛，那么无穷乘积

$$\prod_{k=1}^{+\infty}(1+u_k(z)) \tag{11.8}$$

在 D 内内闭一致收敛于一个不为零的解析函数 $f(z)$．

无穷乘积在 D 内内闭一致收敛，就是指序列$\{\prod\limits_{k=1}^{n}(1+u_k(z))\}$在 D 内内闭一致收敛．

证 由(11.7)，级数 $\sum|\ln(1+u_k(z))|$ 在 D 内内闭一致收敛，从而 $\sum\ln(1+u_k(z))$ 在 D 内内闭一致收敛于一个在 D 内解析的函数，这里及以下的 ln 都满足(11.4)及(11.5)型的条件．因此无穷乘积(11.8)收敛于一个在 D 内无零点的解析函数

$$f(z)=\exp\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\ln(1+u_k(z))\right).$$

现证明无穷乘积在 D 内内闭一致收敛于 $f(z)$．设 F 是 D 内一个有界闭集，并且设 $M=\max\limits_{z\in F}\{|f(z)|\}$，$\forall\varepsilon\in(0,M)$，由于 $\sum\ln(1+u_k(z))$ 在 F 上一致收敛，$\exists N=N(\varepsilon)>0$，当 $n>N$、$z\in F$ 时，

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}\ln(1+u_k(z))\right|<\frac{\varepsilon}{2M}<\frac{1}{2},$$

从而令 $l_k(z)=\ln(1+u_k(z))$，就有

$$\left|f(z)-\prod_{k=1}^{n}(1+u_k(z))\right|=\left|\exp\left(\sum_{k=1}^{\infty}l_k(z)\right)-\exp\left(\sum_{k=1}^{n}l_k(z)\right)\right|$$

$$=\left|\exp\left(\sum_{k=1}^{+\infty} l_k(z)\right)\right|\left|1-\exp\left(-\sum_{k=n+1}^{+\infty} l_k(z)\right)\right|$$

$$\leqslant M\left(\frac{\varepsilon}{2M}+\frac{1}{2!}\left(\frac{\varepsilon}{2M}\right)^2+\cdots\right)$$

$$=\frac{\varepsilon}{2}\left(1+\frac{1}{2!}\frac{\varepsilon}{2M}+\frac{1}{3!}\left(\frac{\varepsilon}{2M}\right)^2+\cdots\right)$$

$$<\frac{\varepsilon}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots\right)=\varepsilon.$$

证完.

无穷乘积可以扩张到有限个因子是零的情形. 设在无穷乘积(11.1)中,当 $k>$ 整数 $n_0>1$ 时, $p_k\neq 0$, 这时如果 $\prod_{k=n_0+1}^{+\infty} p_k$ 收敛, 那么我们说(11.1)收敛于

$$\prod_{k=1}^{n_0} p_k\cdot\prod_{k=n_0+1}^{+\infty} p_k .$$

如果对于某些 $k\leqslant n_0, p_k=0$, 那么就说(11.1)收敛于值零. 这样,收敛的无穷乘积的值是零的必要与充分条件是有一个或有有限个因子是零.

类似地可作出有限个因子是零的无穷乘积绝对收敛的定义. 对于因子是解析函数的乘积, 如果有关区域中某些点是有限个因子的零点, 也可相应地作出收敛、绝对收敛及一致收敛的定义.

定理 11.3 **设** $\{u_k(z)\}(k\in\mathbb{N}-\{0\})$ **是在区域** D **内解析**

函数的序列，并且满足下列条件：

1）所有 $1+u_k(z)$ 的零点集在 D 内没有聚点；

2）D 内任一点只可能是有限个 $1+u_k(z)$ 的零点；

3）$\Sigma|u_k(z)|$ 在 D 内内闭一致收敛，

那么无穷乘积（11.8）在 D 内收敛于一解析函数 $f(z)$，而且 $f(z)$ 的每个零点是有限个 $1+u_k(z)$ 的零点.

证 任取有界闭集 $F\subset D$. 由 1）及 2），F 内只有有限个点是 $1+u_k(z)(k\in\mathbb{N}-\{0\})$ 的零点，而且每个这样的点只可能是有限个 $1+u_k(z)$ 的零点. 因此 $\exists\, n=n(F)$，使得 $\forall k>n$，$1+u_k(z)\neq 0\ (z\in D)$. 由 3）及引理 11.1，$\prod\limits_{k=n+1}^{+\infty}(1+u_k(z))$ 在 F 的内部[①]内闭一致收敛，从而（11.8）在 F 的内部收敛于一解析函数. 由于 D 是所有有界闭集 $F\subset D$ 的内部的并集，并且由于解析函数在 D 内的唯一性，就可得到定理的结论.

***12. 整函数的无穷乘积展式** 先证明一个引理，令

$$E_0(z)=1-z,$$

$$E_k(z)=(1-z)\exp\left(z+\frac{z^2}{2}+\cdots+\frac{z^k}{k}\right)$$

$$(k=1,2,\cdots).$$

我们有

引理 12.1 当 $|z|\leqslant 1$ 时，$\forall k\in\mathbb{N}$，

$$|1-E_k(z)|\leqslant|z|^{k+1}. \tag{12.1}$$

证 对于 $k=0$，（12.1）显然正确. 对于 $k\geqslant 1$，通过计算即得

① F 的内部就是 $F-\partial F$，这里 ∂F 表示 F 的边界.

$$-E_k'(z)=z^k\exp\left(z+\frac{z^2}{2}+\cdots+\frac{z^k}{k}\right).$$

因此 $-E_k'(z)$ 在 $z=0$ 有 k 阶零点，而且它在 0 的泰勒展式中的系数是非负实数. 又因

$$1-E_k(z)=\int_0^z E_k'(\zeta)d\zeta,$$

所以 $1-E_k(z)$ 在 $z=0$ 有 $k+1$ 阶零点. 令

$$\varphi(z)=(1-E_k(z))/z^{k+1},$$

那么 $\varphi(z)=\Sigma a_n z^n$，其中所有 $a_n\geqslant 0$. 因此当 $|z|\leqslant 1$ 时，$|\varphi(z)|\leqslant\varphi(1)=1$. 引理得证.

现在研究整函数的因子分解问题，先证明：

引理 12.2　如果整函数 $f(z)$ 没有零点，那么

$$f(z)=e^{g(z)},$$

其中 $g(z)$ 是一整函数.

证　显然，$f'(z)/f(z)$ 也是一整函数，从而是下列整函数的

$$g_1(z)=\int_0^z\frac{f'(\zeta)d\zeta}{f(\zeta)}$$

导数. 可算出整函数 $f(z)e^{-g_1(z)}$ 的导数恒等于零，于是 $f(z)e^{-g_1(z)}=A$（常数），引理得证.

设整函数 $f(z)$ 在原点有 $m(\geqslant 0)$ 阶零点，此外还有零点 a_1，$a_2,\cdots,a_n$，其中 $m_1(\geqslant 1)$ 阶零点在上列有限序列中出现 m_1 次，于是函数

$$h(z)=f(z)/z^m\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{z}{a_k}\right)$$

在 $\mathbb{C}-\{0,a_1,a_2,\cdots,a_n\}$中解析，而$\{0,a_1,a_2,\cdots,a_n\}$中每一点都是 $h(z)$ 的可去奇点. 因此 $h(z)$ 表示一个没有零点的整函数. 由引理 12.2 就得到

$$f(z)=z^m e^{g(z)}\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{z}{a_k}\right),$$

其中 $g(z)$ 是一整函数.

下列定理中作出具有无穷个已给零点的整函数.

定理 12.1　设$\{a_n\}\subset\mathbb{C}$，$a_n\neq 0$，并且 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\infty$ (有些 a_n 可能相等). 如果$\exists\{p_n\}\subset\mathbb{N}$，使得 $\forall r>0$，

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{r}{|a_n|}\right)^{p_n+1}<+\infty, \tag{12.2}$$

那么

$$h(z)=\prod_{n=1}^{+\infty}E_{p_n}(z/a_n) \tag{12.3}$$

表示一个整函数，它以$\{a_n\}$中的点为零点，并且没有其他零点.

如果 α 在$\{a_n\}$中出现 m 次，那么 α 是 $f(z)$ 的 m 阶零点.

例如取 $p_n=n-1$. 那么 $\forall r>0$, (12.2)成立.

证　$\{a_n\}$是(12.3)中无穷乘积所有的因子的零点构成的序列；这些零点的集显然在 $\mathbb{C}$ 中满足与定理 11.3 中条件 1)及 2) 相应的条件. 要证明 (12.3)中无穷乘积收敛于一整函数，由定理11.3，只须证明 $\forall r>0$,

$$\sum|1-E_{p_n}(z/a_n)| \tag{12.4}$$

在 $|z|\leqslant r$ 上一致收敛. 固定 $r>0$，当 n 充分大，且 $|z|\leqslant r$ 时，

$|z/a_n|\leqslant 1$，于是由引理 12.1，

$$|1-E_{p_n}(z/a_n)|\leqslant\left|\frac{z}{a_n}\right|^{p_n+1}\leqslant\left(\frac{r}{|a_n|}\right)^{p_n+1}$$

由条件(12.2)，(12.4)在 $|z|\leqslant r$ 上一致收敛.

$\forall r>0$，当 n 充分大时，$|a_n|>2r$，亦即 $r/|a_n|<1/2$. 因此取 $p_n=n-1$，$\forall r>0$，(12.2)成立.

定理中其他结论是明显的.

关于一般有无穷个零点的整函数的无穷乘积展式，外尔斯特拉斯证明了下列定理：

定理 12.2 **设整函数**$f(z)$**在** $z=0$ **有** $m(\geqslant 0)$**阶零点**($m=0$ 表示 $f(0)\neq 0$)，**其余无穷个零点可按其阶数排成一个序列**$\{a_n\}$(每个 m_1 阶零点在这序列中出现 m_1 次)，**那么存在着一个整函数**$g(z)$**及一个序列**$\{p_n\}\subset\mathbb{N}$，**使得**

$$f(z)=z^m e^{g(z)}\prod_{n=1}^{+\infty}E_{p_n}(z/a_n)\tag{12.5}$$

证 由定理 12.1，$\exists\{p_n\}\subset\mathbb{N}$，使得整函数

$$h(z)=z^m\prod_{n=1}^{+\infty}E_{p_n}(z/a_n)$$

与 $f(z)$ 有相同的零点，并且每个零点有相同的阶数. 于是函数 $f(z)/h(z)$ 在 $\mathbb{C}-\{0\}-\{a_n\}$ 解析，而在 $z=0, a_1, a_2, \cdots$ 有可去奇点. 因此 $f(z)/h(z)$ 可表示一个没有零点的整函数. 由引理 12.2 就得到定理的结论.

例 求 $\sin\pi z$ 的无穷乘积展式.

解 $\sin\pi z$ 的零点是 $z=\pm n\ (n\in\mathbb{N})$，而且所有这些点都是一阶零点. 取定理 12.1 及定理 12.2 中的 $p_n=1$，$a_{2n-1}=-n$，

$a_{2n}=n\ (n\geq 1)$，那么 $\forall\ r>0$，(12.2) 成立，从而

$$\sin\pi z = ze^{g(z)}\left[(1+z)(1-z)\left(1+\frac{z}{2}\right)\left(1-\frac{z}{2}\right)\cdots\right.$$

$$\left.\left(1+\frac{z}{n}\right)\left(1-\frac{z}{n}\right)\cdots\right], \tag{12.6}$$

其中 $g(z)$是一整函数. 在下一段末，可以断定 $g(z)$是一常数. 又因

$$\lim_{z\to 0}\ (\sin\pi z/z)=\pi\ ,$$

所以在(12.6)中，$e^{g(z)}=\pi$.

由定理 11.1,无穷乘积(12.6)及相应的(11.3)型的级数绝对收敛.从而在乘积中可以合并与 $-n$ 及n 相应的项,最后得到

$$\sin\pi z = z\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right). \tag{12.7}$$

***13. 亚纯函数的部分分式展式**　亚纯函数可以看作是有理函数的推广.有理函数可以写成两个多项式的商,或者写成部分分式展式.这些都可以推广到亚纯函数.首先应用定理 12.1,可立即得到：

定理 13.1　任何亚纯函数是两个整函数的商.

证　已给亚纯函数$f(z)$. 可以作出一个整函数 $h(z)$，使得它的所有零点 $b_1, b_2,\cdots(b_1, b_2,\cdots$ 互不相同)恰好就是 $f(z)$的所有极点，并且使得零点与相应极点的阶数相同. 于是函数 $g(z)=f(z)h(z)$在 $\mathbb{C}-\{b_1, b_2,\cdots\}$内解析,并且以 $b_1, b_2,\cdots$为可去奇点. 因此 $g(z)$确定一个整函数，并且$f(z)=g(z)/h(z)$.

设亚纯函数$f(z)$的所有极点是$b_0=0, b_1, b_2, \cdots, b_n$ ($b_0, b_1, \cdots, b_n$互不相同)，并且$f(z)$在围绕这些极点的罗朗展式中的主要部分分别是$P_0(1/z)$, $P_1(1/(z-b_1))\cdots$, $P_n(1/(z-b_n))$，于是函数

$$g(z)=f(z)-\sum_{k=0}^{n} P_k\left(\frac{1}{z-b_k}\right)$$

在$\mathbb{C}-\{b_0, b_1, \cdots, b_n\}$内解析，而$b_0, b_1, \cdots, b_n$中每一点都是可去奇点，从而$g(z)$确定一个整函数. 因此我们有

$$f(z)=\sum_{k=0}^{n} P\left(\frac{1}{z-b_k}\right)+g(z). \qquad (13.1)$$

这就是$f(z)$的部分分式展式.

如果亚纯函数有无穷个极点，那么与(13.1)中和式相对应的无穷级数在极点以外不一定收敛. 我们要从有关级数每一项中减去一个适当的多项式，使得所得级数在极点以外收敛，从而可以得到与(13.1)相类似的结果.

下列定理中作出具有无穷个已给极点并且具有相应的主要部分的亚纯函数:

定理 13.2 设$\{b_n\}\subset\mathbb{C}$, $0=b_0<|b_1|<|b_2|<\cdots<|b_n|<\cdots$，并且$\lim\limits_{n\to+\infty} b_n=\infty$. 设$P_n(\zeta)$是不含常数项的多项式，那么存在多项式$Q(\zeta)(n\geq 1)$，使得

$$h(z)=P_0\left(\frac{1}{z}\right)+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(P_n\left(\frac{1}{z-b_n}\right)-Q_n(z)\right) \qquad (13.2)$$

是亚纯函数，$h(z)$的所有极点就是$\{b_n\}$中的所有点，并且和极点

b_n **相应的主要部分是** $P_n\left(\frac{1}{z-b_n}\right)$.

证 考虑b_k，其中 $k\geqslant 1$. 函数$P_k(1/(z-b_k))$在 $|z|<|b_k|$ 内解析，并且围绕原点可展开成泰勒级数

$$a_0^{(k)}+a_1^{(k)}z+a_2^{(k)}z^2+\cdots+a_m^{(k)}z^m+\cdots .$$

现估计这级数的系数，设

$$M_k=\max_{|z|\leqslant|b_k|/2}\{|P_k(1/(z-b_k))|\}.$$

由本章(4.1)及上章(4.16)式，我们有

$$|a_m^{(k)}|\leqslant M_k(2/|b_k|)^m$$

取正整数 m_k，令

$$Q_k(z)=a_0^{(k)}+a_1^{(k)}z+\cdots+a_{m_k}z^{m_k},$$

那么当 $|z|\leqslant|b_k|/4$ 时，

$$\left|P_k\left(\frac{1}{z-b_k}\right)-Q_k(z)\right|\leqslant M_k\left\{\left(\frac{2|z|}{|b_k|}\right)^{m_k+1}+\left(\frac{2|z|}{|b_k|}\right)^{m_k+2}+\cdots\right.$$

$$\leqslant M_k\left(\frac{2|z|}{|b_k|}\right)^{m_k+1}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots\right)$$

$$\leqslant 2M_k\left(\frac{1}{2}\right)^{m_k+1}$$

现取定 m_k，使得 $2^{m_k}\geqslant M_k2^k$. 那么当 $|z|\leqslant|b_k|/4$ 时，

$$\left|P_k\left(\frac{1}{z-b_k}\right)-Q_k(z)\right|\leqslant\frac{1}{2^k}$$

同样，当 $n\geqslant k$，$|z|\leqslant|b_n|/4$，从而 $|z|\leqslant|b_k|/4$ 时，

$$\left|P_n\left(\frac{1}{z-b_n}\right)-Q_n(z)\right|\leqslant\frac{1}{2^n}.$$

因此当 $|z|\leqslant|b_k|/4$ 时，

$$\sum_{n=k}^{+\infty}\left[P_n\left(\frac{1}{z-b_n}\right)-Q_n(z)\right].$$

一致收敛．于是在 $|z|<|b_k|/4$ 内，$f(z)$ 除有若干已给极点，并且具有相应的主要部分外，到处解析．

由于 $\lim\limits_{k\to+\infty}b_k=\infty$，$f(z)$ 满足定理 13.1 的结论中的条件．证完．

由定理 13.2 可立即推出：

定理 13.3 设亚纯函数 $f(z)$ 的极点 b_n $(n\in\mathbb{N})$ 满足定理 13.1 中的条件，那么存在多项式 $Q_n(z)$ $(n\geqslant1)$ 及整函数 $g(z)$，使得

$$f(z)=P_0\left(\frac{1}{z}\right)+\sum_{n=1}^{+\infty}\left[P_n\left(\frac{1}{z-b_n}\right)-Q_n(z)\right]+g(z).\qquad(13.3)$$

上列定理是米塔格－列夫勒得到的，它是关于在 $\mathbb{C}$ 上的亚纯函数的．我们定义在一区域内的亚纯函数是在这区域内除有一些极点外到处解析的函数．米塔格－列夫勒曾经把定理13.3 推广到一般区域内的亚纯函数．上节中关于整函数的无穷乘积展式的定理12.2 可以推广到一般区域内解析函数情形．定理13.1 也可推广到一般区域内亚纯函数情形[1]．

[1] 参看 M. Hervé, Les Fonctions Analytiques, Presse Universitaire de France, 1982.

例 1 求$\pi^2/\sin^2\pi z$的部分分式展式

解 $\pi^2/\sin^2\pi z$ 的极点是 $z=\pm n(n\in\mathbb{N})$. 它与 $z=0$ 相应的主要部分是 $1/z^2$; 由于 $\sin^2\pi(z-n)=\sin^2\pi z$, 它与 $z=n$ 相应的主要部分是 $1/(z-n)^2$. 与 $\Sigma 1/n^2$ 相比较, 可见级数

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(z-n)^2} \tag{13.4}$$

在 $z\neq n$ 时收敛. 在任何紧集上, 除去可变为无穷大的项, 而得级数一致收敛. 因此我们有

$$\frac{\pi^2}{\sin^2\pi z}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(z-n)^2}+g(z), \tag{13.5}$$

其中 $g(z)$是一整函数. 下面证明 $g(z)$恒等于零.

显然, $\pi^2/\sin^2\pi z$ 及级数(13.4)有周期 1[①]. 于是 $g(z)$也有周期 1. 令 $\mathrm{Re}z=x, \mathrm{Im}z=y$. 由第二章, 习题11,

$$|\sin\pi z|^2=\cosh^2\pi y+\cos^2\pi x.$$

因此当 $x\in[0,1], |y|\to+\infty$时, $\pi^2/\sin^2\pi z$ 一致趋近于零.

另一方面, 当 $x\in[0,1], |y|>1$ 时, 级数(13.4)绝对并一致收敛, 于是 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N=N(\varepsilon)\in\mathbb{N}-\{0\}$, 使得当 $x\in[0,1]$, $|y|>1$ 时,

$$\left|\sum_{|n|>N}\frac{1}{(z-n)^2}\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

其次, $\exists Y=Y(\varepsilon)>1$, 使得当 $x\in[0,1], y>Y$ 时,

① 所谓 $\mathbb{C}$ 上确定的函数 $f(z)$有周期 1,就是说 $\forall z\in\mathbb{C}, f(z+1)=f(z)$.

$$\left|\sum_{|n|\leqslant N}\frac{1}{(z-n)^2}\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

因此当$x\in[0,1]$,$|y|\to+\infty$时,级数(13.4)一致趋近于零.

由(13.5),当$x\in[0,1]$,$|y|\to+\infty$时,$g(z)$一致趋近于零,于是$g(z)$在带形$0\leqslant \mathrm{Re}z\leqslant 1$上有界;由周期性,整函数$g(z)$在$\mathbb{C}$上有界.由刘维尔定理及以上结果,$g(z)$在$\mathbb{C}$上恒等于零,从而

$$\frac{\pi^2}{\sin^2\pi z}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(z-n)^2}\ . \tag{13.6}$$

例2 求$\pi\cot\pi z$的部分分式展式.

解 $\pi\cot\pi z$的极点是$z=\pm n(n\in\mathbb{N})$.它与$z=n$相应的主要部分是$1/(z-n)$.当$n\neq 0$时,$1/(z-n)$在$z=0$的泰勒展式是$-1/n-z/n^2-z^2/n^3-\cdots$与$\sum(1/n^2)$相比较,可见级数

$$\frac{1}{z}+\sum_{n\neq 0}\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{z}+\sum_{n\neq 0}\frac{z}{n(z-n)}$$

在$z\neq n$时收敛,在任何紧集上,除去可变为无穷大的项,而得级数一致收敛.因此我们有

$$\pi\cot\pi z=\frac{1}{z}+\sum_{n\neq 0}\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n}\right)+g(z), \tag{13.7}$$

其中$g(z)$是一整函数.在(13.7)两边取导数,得

$$-\frac{\pi^2}{\sin^2\pi z}=-\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(z-n)^2}+g'(z).$$

与(13.6)相比较，可见 $g'(z)$恒等于零，从而 $g(z)$ 恒等于一常数C；现确定如下.

把(13.7)所含和式中与 n 及 $-n$ 相应的项合并，我们有

$$\pi\cot\pi z=\lim_{m\to+\infty}\sum_{n=-m}^{m}\frac{1}{z-n}=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2z}{z^2-n^2}+C$$

上式两边所含z 的函数都是奇函数，因此必然有 $C=0$. 于是得

$$\pi\cot\pi z=\frac{1}{z}+\sum_{n\neq0}\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2z}{z^2-n^2}\tag{13.8}$$

应用(13.8)，可以证明(12.6)中的整函数 $g(z)$是一常数. 在(12.6)两边先取对数，然后求导数，即得

$$\pi\cot\pi z=\frac{1}{z}+\sum_{n\neq0}\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n}\right)+g'(z)$$

与(13.8)相比较，可见 $g'(z)$恒等于零，从而(12.6)中的 $g(z)$是一常数.

习 题 四

1. 设已给复数序列$\{z_n\}$. 如果$\lim\limits_{n\to+\infty}z_n=\zeta$，其中$\zeta$是一有限复数，那么

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{z_1+z_2+\cdots+z_n}{n}=\zeta.$$

2. 证明：任何有界的复数序列一定有一个收敛的子序列.
3. 证明在两相乘级数中，一个收敛，一个绝对收敛时，第1段中关于柯西乘积的结果仍成立.
4. 证明定理 2.1 及 2.2.

5. 试求下列幂级数的收敛半径：

(1) $\sum_{n=0}^{+\infty} q^{n^2} z^n$，其中 $|q|<1$；

(2) $\sum_{n=1}^{+\infty} z^{n!}$；

(3) $\sum_{n=0}^{+\infty} n^p z^n$，其中 p 是一正整数；

(4) $\sum_{n=0}^{+\infty} [3+(-1)^n]^n z^n$；

(5) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n} z^n$；

(6) $1+\frac{ab}{c}z+\frac{a(a+1)b(b+1)}{2!c(c+1)}z^2+\cdots+$

$$+\frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)b(b+1)\cdots(b+n-1)}{n!c(c+1)\cdots(c+n-1)}z^n+\cdots,$$

其中 $a、b、c$ 是复数，但 c 不是零或负整数.

6. 设在 $|z|<R$ 内解析的函数 $f(z)$ 有泰勒展式

$$f(z)=\alpha_0+\alpha_1 z+\alpha_2 z^2+\cdots+\alpha_n z^n+\cdots,$$

试证：(1) 令 $M(r)=\max\limits_{0\leqslant\theta\leqslant 2\pi}|f(re^{i\theta})|$，我们有

$$|\alpha_n|\leqslant\frac{M(r)}{r^n}\ (\text{柯西不等式}),$$

在这里 $n=0,1,2,\cdots;0<r<R$.

(2) 由(1)证明刘维尔定理.

(3) 当 $0\leqslant r<R$ 时，

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^2 d\theta=\sum_{n=0}^{+\infty}|\alpha_n|^2 r^{2n}.$$

7. 证明：如果在 $|z|\leqslant r$ 上及 $|z|<\rho$ 内，我们分别有

$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n z^n \text{ 及 } g(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}b_n z^n,$$

其中$0<r$及$\rho<+\infty$，而且$f(z)$在$|z|\leqslant r$上连续，那么在$|z|<\rho r$内，

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n z^n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r} f(\zeta) g\left(\frac{z}{\zeta}\right) \frac{d\zeta}{\zeta} .$$

8. 设z是任一复数，证明$|e^z-1|\leqslant e^{|z|}-1\leqslant |z|e^{|z|}$.

9. 求下列解析函数或多值函数的解析分枝在$z=0$的泰勒展式:

(1) $\sin^2 z$；(2) $e^z\cos z$；(3) $\frac{1}{2}\left(\operatorname{Ln}\frac{1}{1-z}\right)^2$；

(4) $(2-z)^{\frac{3}{4}}$；(5) $\operatorname{tg} z$（计算到z^5的系数）.

10. 设$f(z)$是一整函数，并且假定存在着一个正整数n，以及两个正数R及M，使得当$|z|\geqslant R$时，

$$|f(z)|\leqslant M|z|^n .$$

证明$f(z)$是一个至多n次的多项式或一常数.

11. 求下列解析函数或多值函数的解析分枝在指定区域内的罗朗展式:

(1) $\frac{e^z}{z(z^2+1)}$ 在$0<|z|<1$内；

(2) $\frac{1}{(z^5-1)(z-3)}$ 在$1<|z|<3$内;

(3) $\sin\frac{z}{z-1}$ 在$0<|z-1|<1$内；

(4) $e^{\frac{z}{z+2}}$ 在$2<|z|<+\infty$内;

(5) $\frac{1}{z^a(1+z)}$ 在$0<|z+1|<1$内，其中$0<a<1$；

(6) $\frac{\operatorname{Ln} z}{z^2-1}$ 在$0<|z-1|<1$及$0<|z+1|<1$内.

12. 问下列各函数有哪些孤立奇点? 各属于哪一种类型?

(1) $\frac{z-1}{z(z^2+4)^2}$；　　(2) $\operatorname{ctg} z$；

(3) $\dfrac{1}{\sin z-\sin\alpha}$,其中 α 是一常数;

(4) $\dfrac{e^{\frac{1}{z-1}}}{e^{z}-1}$;

(5) $\sin\dfrac{1}{1-z}$.

13. 证明:在扩充复平面上只有一个一阶极点的解析函数$f(z)$必有下面的形式:

$$f(z)=\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}\ ,\ \alpha\delta-\beta\gamma\neq 0\ .$$

14. 设函数$f(z)$ 在 $z=z_0$ 解析,并且它不恒等于一常数,试证 $z=z_0$ 是 $f(z)$的 m 阶零点的必要与充分条件是:$z=z_0$ 是 $\dfrac{1}{f(z)}$ 的 m 阶极点.

15. 设函数$f(z)$及 $g(z)$满足下列条件之一:

(1)$f(z)$及 $g(z)$在 z_0 分别有 m阶及 n 阶零点;

(2)$f(z)$及 $g(z)$在 z_0 分别有 m阶及 n阶极点;

(3)$f(z)$在 z_0 解析或有极点,$g(z)$在 z_0 有孤立本性奇点.

试问$f(z)+g(z)$,$f(z)g(z)$及 $\dfrac{g(z)}{f(z)}$ 在 z_0 具有什么性质?

16. 设函数$f(z)$在区域 D 内解析,证明:如果对某一点 $z_0\in D$ 有

$$f^{(n)}(z_0)=0,\ n=1,2,\cdots,$$

那么,$f(z)$在 D 内为常数.

17. 问是否存在着满足下列条件,并且在原点解析的函数$f(z)$?

(1) $f\left(\dfrac{1}{2n-1}\right)=0,\ f\left(\dfrac{1}{2n}\right)=\dfrac{1}{2n}$;

(2) $f\left(\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{1}{n+1}$;

(3) $f\left(\dfrac{1}{2n-1}\right)=f\left(\dfrac{1}{2n}\right)=\dfrac{1}{2n}$,

在这里 $n=1,2,3,\cdots$.

18. 函数 $\sin\frac{1}{1-z}$ 的零点 $1-\frac{1}{n\pi}$ $(n=\pm1,\pm2,\pm3,\cdots)$ 所成的集有聚点 1，但这函数不恒等于零．问这与解析函数的唯一性是否相矛盾？

19. 设区域 D 内含有一段实轴．又设函数 $u(x,y)+iv(x,y)$ 及

$$u(z,0)+iv(z,0)$$

都在 D 内解析，求证在 D 内，

$$u(x,y)+iv(x,y)=u(z,0)+iv(z,0).$$

20. 按照下列步骤，证明整函数 $f(z)$ 可写成下列形式：

$$\begin{aligned} f(z)=\alpha_0+\alpha_1 z+\alpha_2 z(z-1)+\alpha_3 z^2(z-1)+\cdots \\ +\alpha_{2k}z^k(z-1)^k+\alpha_{2k+1}z^{k+1}(z-1)^k+\cdots, \end{aligned} \tag{1}$$

其中$\alpha_0,\alpha_2,\alpha_3,\cdots$ 是复常数．

（1）用 $r(\rho)$ 表示圆 $|z|=\rho$，其中 $\rho>1$．

a）证明：对于 $k=1,2,\cdots$，积分

$$\int_{r(\rho)}\frac{dw}{w^k(w-1)^k}$$

的值与 ρ 无关；取极限求出它的值．同样计算

$$\int_{r(\rho)}\frac{dw}{w^{k+1}(w-1)^k} \quad \text{及} \quad \int_{r(\rho)}\frac{dw}{w^k(w-1)^{k+1}}.$$

b）设整函数 $f(z)$ 的展式(1)在 $\mathbb{C}$ 中任何紧集上一致收敛，证明对于 $k\in\mathbb{N}$，(1)的系数可由下列积分给出：

$$\alpha_{2k}=\frac{1}{2i\pi}\int_{r(\rho)}\frac{f(w)dw}{w^{k+1}(w-1)^k},\quad \alpha_{2k+1}=\frac{1}{2i\pi}\int_{r(\rho)}\frac{f(w)dw}{w^{k+1}(w-1)^{k+1}}.$$

（2）a）用递推法证明：如果 α_{2k} 及 α_{2k+1} 由(1) b) 中公式给出，那么对于 $|z|<\rho$，

$$f(z)-\alpha_0-\alpha_1 z-\cdots-\alpha_{2k}z^k(z-1)^k-\alpha_{2k+1}z^{k+1}(z-1)^k$$

$$= \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial D_\rho}\frac{f(w)dw}{(w-z)w^{k+1}(w-1)^{k+1}}.$$

把上式中积分记作 $R_k(z)$.

b）设 D_r 表示圆心在 0、半径为 r 的圆盘. 证明：适当选取 r，当 $k\to+\infty$ 时，$R_k(z)$ 在 D_r 上一致趋近于零.

（3）最后证得：整函数 $f(z)$ 有(1)形的展式，这一展式是唯一的，并且在 $\mathbb{C}$ 中任何紧集上一致收敛.

21. 设 $\{\alpha_n\}(n\in\mathbb{N})$ 是一复数序列.

（1）设 $\alpha_1=1$，并且 $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} n|\alpha_n|\leqslant 1$，证明级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\alpha_n z^n$ 的收敛半径 $\geqslant 1$，并且它的和 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\alpha_n z^n$ 是在单位圆盘内确定的内射.

（2）设 $\alpha_1\neq 0$. 证明：如果级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\alpha_n z^n$ 的收敛半径不是零，那么 $\exists r>0$，使得级数和是在 $|z|<r$ 内确定的内射.

（3）设函数 $g(z)$ 在一点 z_0 的邻域内解析，并且 $g'(z_0)\neq 0$，那么 $g(z)$ 是在 z_0 的一个邻域内确定的内射.

*22. 证明：

（1）$\prod\limits_{n=2}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{2}$.

（2）当 $|z|<1$ 时，$\prod\limits_{n=1}^{+\infty}(1+z^n)=\frac{1}{1-z}$.

（3）$\prod\limits_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}$ 在 $\mathbb{C}$ 上绝对并且内闭一致收敛.

*23.（1）设 $0<|\alpha|<1$，并且 $|z|\leqslant r<1$，证明

$$\left|\frac{\alpha+|\alpha|z}{(1-\bar{\alpha}z)\alpha}\right|\leqslant\frac{1+r}{1-r}.$$

（2）设 $\{\alpha_n\}\subset\mathbb{C}$，并且 $0<|\alpha_n|<1$，$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(1-|\alpha_n|)<+\infty$，证明无穷乘积

$$B(z)=\prod_{n=1}^{+\infty}\frac{|\alpha_n|}{\alpha_n}\left(\frac{\alpha_n-z}{1-\alpha_n z}\right)$$

在单位圆盘内内闭一致收敛，并且 $|B(z)|\leqslant 1$.

$B(z)$ 称为布拉施克乘积.

(3)取 $\{\alpha_n\}$满足 $0<|\alpha_n|<1$ 以及 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(1-|\alpha_n|)<+\infty$，使得 $\forall\theta\in[0,2\pi)$，$e^{i\theta}$ 是 $\{\alpha_n\}$的聚点.

*24. 证明:

(1) $\cos\pi z=\prod\limits_{n=1}^{+\infty}\left(1-\dfrac{4z^2}{(2n-1)^2}\right)$.

(2) $\cos\dfrac{\pi z}{4}-\sin\dfrac{\pi z}{4}=\prod\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{1+(-1)^n z}{2n-1}\right)$.

*25. 设 $\{a_n\}$及 $\{b_n\}\subset\mathbb{C}$，并且 $a_n\neq 0$，$\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\infty$.

(1) 设选取$\{k_n\}\subset\mathbb{N}$，使得 $\forall r>0$，级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{r}{a_k}\right)^{k_n}\frac{b_n}{a_n} \tag{2}$$

绝对收敛，证明

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{k_n}\frac{b_n}{z-a_n} \tag{3}$$

表示 $\mathbb{C}$ 上的一个亚纯函数，其极点为a_n.

(2)证明：如果$\lim\limits_{n\to+\infty}|b_n|<+\infty$，$k_n=n$ $(n=1,2,\cdots)$，那么 $\forall r>0$，级数(1)绝对收敛.

(3) 证明：如果$\exists k\in\mathbb{N}$，使得级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{b_n}{a_n^{k+1}}$$

绝对收敛，并且如果 $k_n=k\ (n=1,2,\cdots)$，那么 $\forall\, r>0$，级数（1）绝对收敛.

（4）证明：如果级数(2)表示 $\mathbb{C}$ 上的一个亚纯函数$f(z)$，那么

$$f(z)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left\{\frac{b_n}{z-a_n}+\frac{b_n}{a_n}\left[1+\frac{z}{a_n}+\left(\frac{z}{a_n}\right)^2+\cdots+\left(\frac{z}{a_n}\right)^{k_n-1}\right]\right\}.$$

第五章　留　　数

§1．一 般 理 论

1．留数定理　留数理论及其应用对复变函数论的发展起过一定的推动作用．本章首先讲述留数的一般理论，然后讲述它的应用，特别是对计算某些定积分的应用．现在先从留数的定义及其基本定理开始．

设函数 $f(z)$ 在点 z_0 解析．作圆 $C:|z-z_0|=r$，使 $f(z)$在以它为边界的闭圆盘上解析，那么根据柯西定理，积分

$$\int_C f(z)dz \tag{1.1}$$

等于零．

设函数 $f(z)$在区域 $0<|z-z_0|<R$ 内解析．选取 r，使 $0<r<R$，并且作圆 $C:|z-z_0|=r$，那么如果$f(z)$在 z_0 也解析，积分(1.1)仍然等于零；如果 z_0 是$f(z)$的孤立奇点，积分(1.1)就不一定等于零，这时我们把积分

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)dz \tag{1.2}$$

定义为函数$f(z)$在孤立奇点 z_0 的留数，记作 $\mathrm{Res}(f, z_0)$，这里积分是沿着 C 按反时针方向取的．

这里定义的留数 $\mathrm{Res}(f,z_0)$与圆 C 的半径 r 无关．事实上，在 $0<|z-z_0|<R$ 内，$f(z)$有罗朗展式：

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\alpha_n(z-z_0)^n, \tag{1.3}$$

而且这一展式在 C 上一致收敛．逐项积分，我们有

$$\int_C f(z)dz=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\alpha_n\int_C (z-z_0)^n dz=2\pi i\alpha_{-1}.$$

因此 $\operatorname{Res}(f,z_0)=\alpha_{-1}$，亦即 $f(z)$ 在 z_0 的留数等于罗朗级数展式(1.3)中 $\dfrac{1}{z-z_0}$ 的系数，它显然与圆 C 的半径 r 无关．

由此还可看出，如果 z_0 是 $f(z)$ 的可去奇点，那么 $\operatorname{Res}(f,z_0)=0$．现在不难证明下列基本定理：

定理 1.1 设 D 是在复平面上的一个有界区域，其边界是一条或有限条简单闭曲线 C(图 24 中，C 是由 C_0，C_1 及 C_2 组成的)．**设函数 $f(z)$ 在 D 内除去孤立奇点 z_1，z_2，$\cdots$，z_n 外，在每一点都解析，并且它在 C 上每一点也解析，那么我们有**

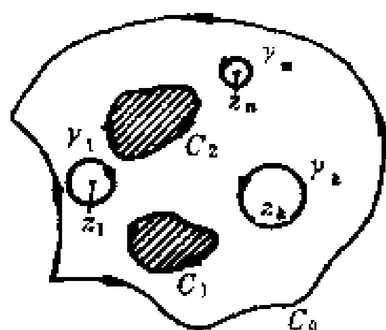


图 24

$$\int_C f(z)dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}(f,z_k),\qquad(1.4)$$

这里沿 C 的积分是按关于区域 D 的正向取的．

证 以 D 内每一个孤立奇点 z_k 为心，作圆 γ_k，使以它为边界的闭圆盘上每一点都在 D 内，并且使任意两个这样的闭圆盘彼此无公共点．从 D 中除去以这些 γ_k 为边界的闭圆盘得一区域 G，其边界是 C 以及 γ_k．在 G 及其边界所组成的闭区域 $\overline{G}$ 上，$f(z)$ 解析．因此根据柯西定理(第三章，(3.4)式)，

$$\int_C f(z)dz=\sum_{k=1}^{n}\int_{\gamma_k} f(z)dz,$$

这里沿 C 的积分是按关于区域 D 的正向取的，沿 γ_k 的积分是按反时针方向取的．根据留数的定义，由此可立即推出(1.4)．

2．留数的计算 在本段中，我们讲述在几种常见的情形下，如何计算留数．

首先考虑一阶极点的情形．设 z_0 是函数 $f(z)$ 的一个一阶极点．这就是说，在去掉中心 z_0 的某一圆盘内 $(z\neq z_0)$，

$$f(z)=\frac{1}{z-z_0}\varphi(z),$$

其中 $\varphi(z)$ 在这圆盘内包括在 $z=z_0$ 解析，其泰勒级数展式是：

$$\varphi(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\alpha_n(z-z_0)^n, \tag{2.1}$$

而且 $\alpha_0=\varphi(z_0)\neq 0$．显然，在 $f(z)$ 的罗朗级数中，$\dfrac{1}{z-z_0}$ 的系数等于 $\varphi(z_0)$．因此

$$\operatorname{Res}(f,z_0)=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z).$$

如果容易求出展式(2.1)，那么由此可得 $\operatorname{Res}(f,z_0)=\alpha_0$；否则要采用其他方法求留数．

如果在上述去掉中心 z_0 的圆盘内 $(z\neq z_0)$，

$$f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}, \tag{2.2}$$

其中 $P(z)$ 及 $Q(z)$ 在这圆盘内包括在 $z=z_0$ 解析，$P(z_0)\neq 0$，z_0 是 $Q(z)$ 的一阶零点，并且 $Q(z)$ 在这圆盘内没有其他零点，那么 z_0 是 $f(z)$ 的一阶极点，因而

$$\operatorname{Res}(f,z_0)=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)\frac{P(z)}{Q(z)-Q(z_0)}$$

$$= P(z_0)/Q'(z_0). \tag{2.3}$$

例1 函数

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{1+z^2}$$

有两个一阶极点 $z = \pm i$，这时

$$\frac{P(z)}{Q'(z)} = \frac{1}{2z} e^{iz}.$$

因此 $\operatorname{Res}(f, i) = -\dfrac{i}{2e}$，$\operatorname{Res}(f, -i) = \dfrac{i}{2} e$.

其次考虑高阶极点的情形．设 z_0 是函数 $f(z)$的一个 k 阶极点 $(k>1)$．这就是说，在去掉中心 z_0 的某一圆盘内 $(z \neq z_0)$，

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^k},$$

其中 $\varphi(z)$在这圆盘内包括在 $z = z_0$ 解析，而且 $\varphi(z_0) \neq 0$．在这圆盘内，$\varphi(z)$有展式(2.1)．由此可见，

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \alpha_{k-1}, \tag{2.4}$$

因此问题化成了求 $\varphi(z)$的泰勒展式的系数．如果(2.1)容易求出，问题就已解决，否则还可用另法求留数．

显然，

$$\alpha_{k-1} = \frac{\varphi^{(k-1)}(z_0)}{(k-1)!} = \lim_{z \to z_0} \frac{\varphi^{(k-1)}(z)}{(k-1)!}.$$

因此我们也可根据下列公式计算 $\operatorname{Res}(f, z_0)$：

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{k-1}[(z-z_0)^k f(z)]}{dz^{k-1}}. \tag{2.5}$$

例 2 函数

$$f(z)=\frac{\sec z}{z^3}$$

在$z=0$有三阶极点．由第四章第 4 段例 4，这时

$$\varphi(z)=\sec z=1+\frac{1}{2!}z^2+\frac{5}{4!}z^4+\cdots .$$

因此 $\operatorname{Res}(f,0)=\frac{1}{2}$ ．

由(2.5)，$\operatorname{Res}(f,0)$也可由下列公式求得：

$$\operatorname{Res}(f,0)=\frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{d^2}{dz^2}\left(z^3\cdot\frac{\sec z}{z^3}\right)=\frac{1}{2} .$$

例 3 函数

$$f(z)=\frac{e^{iz}}{z(z^2+1)^2}$$

在 $z=i$ 有二阶极点．这时

$$\varphi(z)=\frac{e^{iz}}{z(z+i)^2} .$$

令 $z=i+t$．那么在

$$h(t)=\frac{e^{i(t+i)}}{(i+t)(2i+t)^2}$$

的泰勒展式中，t 的系数就是$f(z)$在 i 的留数．写出 $h(t)$中每个因子的泰勒展式到 t 的一次项，我们有：当 $|t|<1$ 时，

$$e^{i(t+i)}=e^{-1}(1+it+\cdots),$$

$$(i+t)^{-1}=-i(1-it)^{-1}=-i(1+it+\cdots),$$

$$(2i+t)^{-2}=-\frac{1}{4}\left(1-\frac{i}{2}t\right)^{-2}=-\frac{1}{4}(1+it+\cdots).$$

因此当 $|t|<1$ 时，

$$h(t)=\frac{i}{4e}(1+3it+\cdots).$$

于是 $\text{Res}(f,i)=-\frac{3}{4e}$.

由(2.5)，$\text{Res}(f,i)$ 也可由下列公式求得：

$$\text{Res}(f,i)=\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left[\frac{e^{iz}}{z(z+i)^2}\right]=-\frac{3}{4e}.$$

§2. 留数计算的应用

3. 积分的计算(Ⅰ) 在本节中，我们讲述留数计算的应用．现在先讲它对计算积分的应用．在数学分析以及实际问题中，往往要求出一些定积分或反常积分的值，而这些积分中被积函数的原函数，不能用初等函数表示出来；有时即令可以求出原函数，计算也往往比较复杂．利用留数定理，要计算某些类型的定积分或反常积分，只须计算某些解析函数在孤立奇点的留数；这样就把问题大大简化了．利用留数计算定积分或反常积分没有普遍适用的方法．我们只考虑几种特殊类型的积分，并且指出怎样把计算这些类型的积分的问题化为计算留数的问题．在本段中，我们只应用单值解析函数计算积分，下一段再讲述怎样应用多值解析函数来计算某些积分．

利用留数计算定积分或反常积分有局限性，不可能应用它来求所有这样的积分．

例 1 计算积分

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{dt}{a+\sin t},\tag{3.1}$$

其中常数 $a>1$．

令 $e^{it}=z$，那么 $\sin t=\dfrac{1}{2i}\left(z-\dfrac{1}{z}\right)$，$dt=\dfrac{dz}{iz}$，而且当 t 从0 增加到 2π 时，z 按反时针方向绕圆 $C:|z|=1$ 一周．因此

$$I=\int_C \frac{2dz}{z^2+2iaz-1}\,. \tag{3.2}$$

于是应用留数定理，只须计算 $\dfrac{2}{z^2+2iaz-1}$ 在 $|z|<1$ 内极点处的留数，就可求出 I．

积分(3.2)中被积函数有两个极点：$z_1=-ia+i\sqrt{a^2-1}$ 及 $z_2=-ia-i\sqrt{a^2-1}$．显然，$|z_1|<1$，$|z_2|>1$．因此被积函数在 $|z|<1$ 内只有一个极点 z_1，而它在这点的留数是

$$\frac{2}{2z_1+2ia}=\frac{1}{i\sqrt{a^2-1}}\,.$$

于是求得

$$I=2\pi i\cdot\frac{1}{i\sqrt{a^2-1}}=\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}\,.$$

应用同样的方法，可计算一般形如

$$I=\int_0^{2\pi} R(\sin t,\cos t)dt$$

的积分，其中 $R(x,y)$是有理分式，并且在圆 $C:x^2+y^2=1$ 上，分母不等于零．

例2 计算积分

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^2}\,. \tag{3.3}$$

这一积分显然收敛．应用留数定理来计算它比较简单．为此，考虑函数 $\frac{1}{(1+z^2)^2}$．这函数有两个二阶极点，在上半平面的一个是 $z=i$．

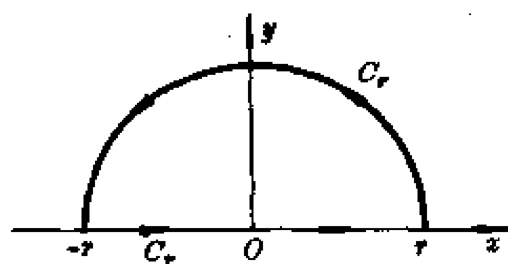


图 25

作以 O 为心、r 为半径的圆盘．考虑这一圆盘在上半平面的部分，设其边界为 C_r(图 25)．

取 $r>1$，那么 $z=i$ 包含在 C_r的内区域内．沿 C_r取 $\frac{1}{(1+z^2)^2}$ 的积分，我们有

$$\int_{-r}^{r}\frac{dx}{(1+x^2)^2}+\int_{\Gamma_r}\frac{dz}{(1+z^2)^2}=2\pi i\,\mathrm{Res}\left(\frac{1}{(1+z^2)^2},i\right)$$

$$=2\pi i\cdot\frac{1}{4i}=\frac{\pi}{2}, \tag{3.4}$$

其中 Γ_r 表示 C_r 上的圆弧部分，沿它的积分是按辐角增加的方向取的．

现在估计(3.4)左边第二个积分．我们有

$$\left|\int_{\Gamma_r}\frac{dz}{(1+z^2)^2}\right|\leqslant\frac{1}{(r^2-1)^2}\cdot\pi r.$$

因此

$$\lim_{r\to+\infty}\int_{\Gamma_r}\frac{dz}{(1+z^2)^2}=0.$$

在(3.4)中令 r 趋近于 $+\infty$，就得到

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^2}=\frac{\pi}{2},$$

从而 $I=\frac{\pi}{4}$.

事实上，由(3.4)取极限所得到的是上列反常积分的主值．但这一反常积分显然收敛，因此主值就是积分的值．

计算例 2 中积分的方法可用来计算一般形如

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)dx$$

的积分，其中 $R(x)$ 是有理分式，分母在实轴上不为零，并且分母的次数比分子的次数至少高 2 次．

应用留数计算另一类型的积分需要下列引理：

引理 3.1　设 $f(z)$ 是在闭区域

$$\theta_1 \leqslant \operatorname{Arg} z \leqslant \theta_2,\ r_0 \leqslant |z| < +\infty\ (r_0 \geqslant 0, 0 \leqslant \theta_1 < \theta_2 \leqslant \pi)$$

上连续的复变函数，并且设 Γ_r 是以 O 为心、r 为半径的圆弧在这闭区域上的一段（$r \geqslant r_0$）．如果当 z 在这闭区域上时，

$$\lim_{z\to\infty} f(z)=0, \tag{3.5}$$

那么我们有

$$\lim_{r\to+\infty}\int_{\Gamma_r} f(z)e^{iz}dz=0. \tag{3.6}$$

证　设 $M(r)$ 是 $|f(z)|$ 在 Γ_r 上的最大值，我们有

$$\left|\int_{\Gamma_r} f(z)e^{iz}dz\right| \leqslant M(r)\int_{\Gamma_r} e^{-r\sin\theta} rd\theta$$

$$\leqslant M(r)\int_0^{\pi} e^{-r\sin\theta} rd\theta = 2M(r)\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r\sin\theta} rd\theta. \tag{3.7}$$

因为当 $0<\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时，

$$\frac{2}{\pi}\leqslant\frac{\sin\theta}{\theta}\leqslant 1,$$

所以

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r\sin\theta} r d\theta \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2}{\pi}r\theta} r d\theta < \int_0^{+\infty} e^{-\frac{2}{\pi}r\theta} r d\theta = \frac{\pi}{2}. \tag{3.8}$$

于是由(3.5)，(3.7)及(3.8)可以推出(3.6)．

例3 计算积分

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2+1}dx.$$

取 $r>0$，我们有

$$\int_0^r \frac{\cos x}{x^2+1}dx=\int_0^r\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2(x^2+1)}dx=\frac{1}{2}\int_{-r}^{r}\frac{e^{ix}}{x^2+1}dx. \tag{3.9}$$

函数 $\frac{e^{iz}}{z^2+1}$ 在 $y\geqslant 0$ 上除去有一阶极点 $z=i$ 外，在其他每一点解析．作图25中那样的区域，而只须取 $r>1$．于是我们有

$$\int_{-r}^{r}\frac{e^{ix}}{x^2+1}dx+\int_{\Gamma_r}\frac{e^{iz}}{z^2+1}dz=2\pi i\,\mathrm{Res}\left(\frac{e^{iz}}{z^2+1},i\right)=\frac{\pi}{e}. \tag{3.10}$$

其中 Γ_r 的意义及沿它的积分的方向同(3.4)．

现在应用引理3.1．取 $f(z)=\frac{1}{z^2+1}$，$\theta_1=0$，$\theta_2=\pi$，$r_0=2$，

那么在这引理中所设各条件显然成立．因此在(3.10)中令 r 趋近

于 $+\infty$，就得到

$$\lim_{r\to+\infty}\int_{-r}^{r}\frac{e^{ix}}{x^2+1}dx=\frac{\pi}{e};$$

从而由(3.9)，可见积分 I 收敛，并且 $I=\frac{\pi}{2e}$.

计算例 3 中积分的方法可用来计算一般形如

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{ix}dx \tag{3.11}$$

的积分，其中 $f(z)$ 在 $\operatorname{Im}z\geqslant 0$ 上可能有有限个孤立奇点外，在其他每一点解析，而且当 z 在 $\operatorname{Im}z\geqslant 0$ 上时，(3.5)成立.

我们注意，应用上面的方法，求出的是(3.11)中反常积分的主值. 但在一般给出的问题中，或者只需要求主值，或者不难预先看出这一反常积分收敛，因此，所求出的那个主值恰好就是所需要的值.

设在(3.11)中，函数 $f(z)$ 在 $y\geqslant 0$ 上除去有有限个孤立奇点外，在其他每一点解析，而且在实轴上有孤立奇点. 这时也往往可适当改变上面的方法，求出积分 I 的值. 现举例如下：

例 4 计算积分

$$I=\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx.$$

取 ε 及 r，使 $r>\varepsilon>0$. 我们有

$$\int_{\varepsilon}^{r}\frac{\sin x}{x}dx=\int_{\varepsilon}^{r}\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2ix}dx=-\frac{i}{2}\left[\int_{\varepsilon}^{r}\frac{e^{ix}}{x}dx+\int_{-r}^{-\varepsilon}\frac{e^{ix}}{x}dx\right]. \tag{3.12}$$

函数 $\frac{e^{iz}}{z}$ 只是在 $z=0$ 有一阶极点．把图 25 加以改变，在上半平面添作一个以原点为心、ε 为半径的半圆 Γ_ε（$0<\varepsilon<r$；图 26）．于是我们有

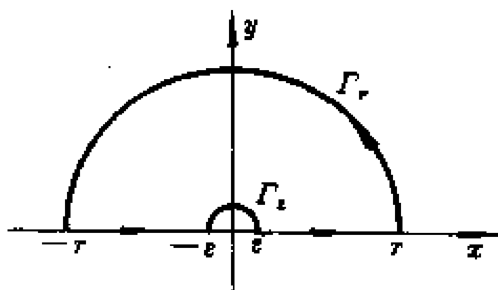


图 26

$$\int_{\varepsilon}^{r}\frac{e^{ix}}{x}dx+\int_{\Gamma_r}\frac{e^{iz}}{z}dz+\int_{-r}^{-\varepsilon}\frac{e^{ix}}{x}dx+\int_{\Gamma_\varepsilon}\frac{e^{iz}}{z}dz=0,\quad(3.13)$$

在这里沿 Γ_ε 及 Γ_r 的积分分别是按辐角减小及增加的方向取的．

现在求当 ε 趋近于 0 时，$\int_{\Gamma_\varepsilon}\frac{e^{iz}}{z}dz$ 的极限．当 $z\neq 0$ 时，

$$\frac{e^{iz}}{z}=\frac{1}{z}+h(z),$$

其中 $h(z)$ 是在 $z=0$ 的解析函数．因此

$$\int_{\Gamma_\varepsilon}\frac{e^{iz}}{z}dz=\int_{\Gamma_\varepsilon}\frac{dz}{z}+\int_{\Gamma_\varepsilon}h(z)dz=-\pi i+\int_{\Gamma_\varepsilon}h(z)dz.$$

由于 $h(z)$ 在 $z=0$ 解析，在 $z=0$ 的一个邻域内，$|h(z)|$ 有上界 $M<+\infty$．于是当 ε 充分小时，

$$\left|\int_{\Gamma_\varepsilon}h(z)\,dz\right|\leqslant M\cdot 2\pi\varepsilon,$$

从而

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma_\varepsilon}\frac{e^{iz}}{z}dz=-\pi i.$$

在(3.13)中令 ε 趋近于 0，r 趋近于 $+\infty$，应用引理 3.1，并结合(3.12)，就可看出积分 I 收敛，并且 $I=\dfrac{\pi}{2}$.

4. 积分的计算(Ⅱ) 现在我们应用多值函数来计算某些实变函数的积分．这时我们要对多值函数的某些解析分枝应用留数定理．为此，首先要在复平面上取适当的割线，使得在所得区域内可以把有关多值函数分成解析分枝．在这里我们举出几个例子．

例 1 计算积分

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x)x^\alpha}, \tag{4.1}$$

其中 $0<\alpha<1$.

考虑多值函数 $\dfrac{1}{(1+z)z^\alpha}$．在复平面上取正实轴作割线，得一区域，并且在这区域内除去 $z=-1$．在最后所得区域内，这函数可以分成解析分枝；取在割线上沿取实值的解析分枝，并且用 $\dfrac{1}{(1+z)(z^\alpha)_0}$ 表示它．显然它在 $z=-1$ 有一阶极点．

把 $\dfrac{1}{(1+z)(z^\alpha)_0}$ 沿着如下的一条闭曲线 $C(r,\varepsilon)$ 积分：首先沿正实轴的上沿从 ε 到 $r(0<\varepsilon<1<r<+\infty)$；其次按反时针方向，沿以 O 为心、r 为半径的圆 Γ_r 前进；然后沿正实轴的下沿从 r 到 ε；最后按顺时针方向、绕过以 O 为心、ε 为半径的圆 Γ_ε(图 27)．$\dfrac{1}{(1+z)(z^\alpha)_0}$

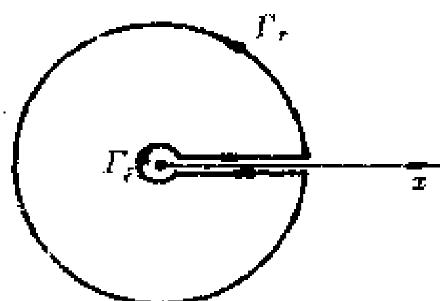


图 27

在 $C(r,\varepsilon)$的内区域内有唯一极点 $z=-1$. 又由于在正实轴下沿，$(z^{\alpha})_0=e^{2\pi i\alpha}|z|^{\alpha}$，我们有

$$(1-e^{-2\pi i\alpha})\int_{\varepsilon}^{r}\frac{dx}{(1+x)x^{\alpha}}+\int_{\Gamma_r}\frac{dz}{(1+z)(z^{\alpha})_0}+\int_{\Gamma_{\varepsilon}}\frac{dz}{(1+z)(z^{\alpha})_0}$$

$$=2\pi i\mathrm{Res}\left(\frac{1}{(1+z)(z^{\alpha})_0},-1\right)=\frac{2\pi i}{e^{\pi i\alpha}}. \qquad (4.2)$$

现在我们估计(4.2)中第三个积分. 我们有

$$\left|\int_{\Gamma_{\varepsilon}}\frac{dz}{(1+z)(z^{\alpha})_0}\right|\leqslant\frac{\pi\varepsilon}{(1-\varepsilon)\varepsilon^{\alpha}}=\frac{\pi\varepsilon^{1-\alpha}}{1-\varepsilon}.$$

因此

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\Gamma_{\varepsilon}}\frac{dz}{(1+z)(z^{\alpha})_0}=0.$$

类似地证明

$$\lim_{r\to+\infty}\int_{\Gamma_r}\frac{dz}{(1+z)(z^{\alpha})_0}=0.$$

在(4.2)中令 ε 趋近于0，r 趋近于 $+\infty$，我们就可看出(4.1)中的积分 I 收敛，并且

$$(1-e^{-2\pi i\alpha})I=\frac{2\pi i}{e^{\pi i\alpha}}.$$

因此 $I=\dfrac{\pi}{\sin\pi\alpha}$.

例 1 也可化成单值函数的情况求解. 在(4.1)中，令 $x=e^{u}$，我们有

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{\beta u}du}{1+e^{u}}, \qquad (4.1')$$

其中$0<b=1-\alpha<1$.

考虑在 $w=u+iv$平面上的解析函数

$$\frac{e^{bw}}{1+e^{w}}.$$

它在闭带形$0\leqslant \mathrm{Im}w\leqslant 2\pi$ 中有唯一的一阶极点 $w=\pi i$.

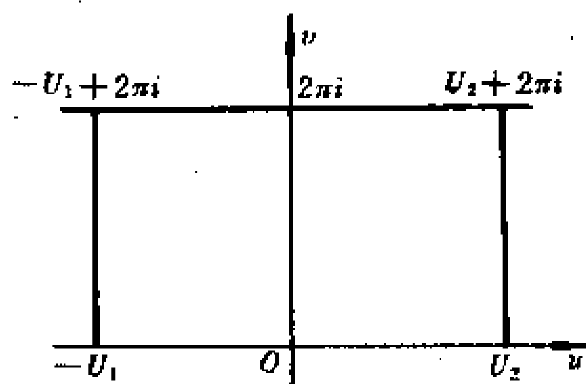


图 28

作以$-U_1$, U_2, $U_2+2\pi i$及$-U_1+2\pi i$为顶点的矩形($0<U_1$, $U_2<+\infty$)(图 28). 沿这矩形的边界取 $\dfrac{e^{bw}}{1+e^{w}}$ 的积分，我们有

$$\int_{-U_1}^{U_2}\frac{e^{bu}du}{1+e^{u}}+\int_0^{2\pi}\frac{e^{b(U_2+iv)}}{1+e^{U_2+iv}}idv+\int_{U_2}^{-U_1}\frac{e^{b(u+2\pi i)}}{1+e^{u}}du$$

$$+\int_{2\pi}^{0}\frac{e^{b(-U_1+iv)}}{1+e^{-U_1+iv}}idv=2\pi i\mathrm{Res}\left(\frac{e^{bw}}{1+e^{w}},\pi i\right),$$

亦即

$$(1-e^{2\pi bi})\int_{-U_1}^{U_2}\frac{e^{bu}}{1+e^{u}}du+\int_0^{2\pi}\frac{e^{b(U_2+iv)}}{1+e^{U_2+iv}}idv,$$

$$+\int_{0}^{2\pi}\frac{e^{b(-U_1+iv)}}{1+e^{-U_1+iv}}(-i)dv=-2\pi i e^{b\pi i}. \qquad (4.2')$$

现估计(4.2 ′)左边第二及第三个积分．我们有

$$\left|\int_{0}^{2\pi}\frac{e^{b(U_2+iv)}}{1+e^{U_2+iv}}idv\right|\leqslant\int_{0}^{2\pi}\frac{e^{bU_2}}{e^{U_2}-1}dv=\frac{2\pi e^{bU_2}}{e^{U_2}-1},$$

$$\left|\int_{0}^{2\pi}\frac{e^{b(-U_1+iv)}}{1+e^{-U_1+iv}}(-i)dv\right|\leqslant\int_{0}^{2\pi}\frac{e^{-bU_1}}{1-e^{-U_1}}dv=\frac{2\pi e^{-bU_1}}{1-e^{-U_1}}.$$

因此上述两个积分当 U_2 及 $U_1\to+\infty$ 时分别趋近于零．

在(4.2 ′)中令 U_2 及 $U_1\to+\infty$，我们得到

$$(1-e^{2\pi bi})I=-2\pi i e^{b\pi i},$$

从而

$$I=\frac{\pi}{\sin\pi b}=\frac{\pi}{\sin\pi\alpha}.$$

计算上例中积分的方法可用来计算一般形如

$$I=\int_{0}^{+\infty}\frac{R(x)}{x^{\alpha}}dx$$

的积分，其中 $0<\alpha<1$，$R(x)$是一个有理分式，其分母比分子次数高，并且分母在正实轴上不为零．

例 2 计算积分

$$I=\int_{0}^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x)^3}dx. \qquad (4.3)$$

考虑多值解析函数 $\frac{(\mathrm{Ln}\,z)^2}{(1+z)^3}$ ①．在复平面上取正实轴作割

① 如果考虑多值函数 $\frac{\mathrm{Ln}\,z}{(1+z)^3}$，那么就不可能像在下面(4.5)的右边那样出现 $\frac{\ln x}{(1+x)^3}$ 的积分．

线，得一区域．在这一区域内除去 $z=-1$，在最后所得区域内，可把 $\dfrac{(\mathrm{Ln}\, z)^2}{(1+z)^3}$ 分成解析函数分枝；取在割线上沿取实值的一分枝，并且 $\dfrac{(\ln z)^2}{(1+z)^3}$ 表示它．显然，它在 -1 有三阶极点．

作闭曲线 $C(r,\varepsilon)(0<\varepsilon<1<r)$ 如图 27．于是 $\dfrac{(\ln z)^2}{(1+z)^3}$ 的极点 $z=-1$ 在 Γ_ε 及 Γ_r 之间．因而

$$\int_{C(r,\varepsilon)} \frac{(\ln z)^2}{(1+z)^3}\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{(\ln z)^2}{(1+z)^3}, -1\right), \quad (4.4)$$

其中沿 $C(r,\varepsilon)$ 的积分是按例 1 中同样的方向取的．

另一方面，在正实轴下沿，$(\ln z)^2=(\ln x+2\pi i)^2$．因此

$$\begin{aligned}\int_{C(r,\varepsilon)} \frac{(\ln z)^2}{(1+z)^3}\,dz &= \int_\varepsilon^r \frac{(\ln x)^2}{(1+x)^3}\,dx + \int_{\Gamma_r} \frac{(\ln z)^2}{(1+z)^3}\,dz \\ &\quad + \int_r^\varepsilon \frac{(\ln x+2\pi i)^2}{(1+x)^3}\,dx + \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{(\ln z)^2}{(1+z)^3}\,dz \\ &= -4\pi i\int_\varepsilon^r \frac{\ln x}{(1+x)^3}\,dx + 4\pi^2\int_\varepsilon^r \frac{dx}{(1+x)^3} \\ &\quad + \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{(\ln z)^2}{(1+z)^3}\,dz + \int_{\Gamma_r} \frac{(\ln z)^2}{(1+z)^3}\,dz. \end{aligned} \quad (4.5)$$

由于

$$\left|z\frac{(\ln z)^2}{(1+z)^3}\right| \leqslant \left|\frac{z}{(1+z)^3}\right|(|\ln|z||+2\pi)^2,$$

我们有

$$\lim_{z\to+\infty} z\cdot\frac{(\ln z)^2}{(1+z)^3}=\lim_{z\to 0} z\cdot\frac{(\ln z)^2}{(1+z)^3}=0.$$

于是与例1中一样，

$$\lim_{r\to+\infty}\int_{\Gamma_r}\frac{(\ln z)^2}{(1+z)^3}\,dz=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma_\varepsilon}\frac{(\ln z)^2}{(1+z)^3}\,dz=0.$$

结合(4.3)及(4.4)，并且取 $\varepsilon\to 0$，$r\to+\infty$ 时的极限．由于 $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x)^3}$ 存在，可见(4.3)中的积分 I 存在，并且我们有

$$-4\pi iI+4\pi^2\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x)^3}=2\pi i\,\mathrm{Res}\left(\frac{(\ln z)^2}{(1+z)^3},-1\right).\tag{4.6}$$

现在求上式右边的留数，$\ln z$在$z=-1$ 有泰勒展式

$$\ln z=\ln[-1+(z+1)]=i\pi-(z+1)-\frac{1}{2}(z+1)^2+\cdots,$$

而$(\ln z)^2$ 在 $z=-1$ 的展式恰好是上一展式的平方，其中含$(z+1)^2$一项的系数是$1-i\pi$．因此

$$\mathrm{Res}\left(\frac{(\ln z)^2}{(1+z)^3},-1\right)=1-i\pi.$$

把这一结果代入(4.6)，并比较两边的虚部，就得到$I=-\frac{1}{2}$．

计算例 2 中积分的方法可用来计算一般形如

$$I=\int_0^{+\infty} R(x)\ln x dx$$

的积分，这里 $R(x)$是一个有理分式，其分母比分子的次数至少高 2 次，并且分母在正实轴上不为零．

例 3 计算积分

$$I=\int_0^1 \frac{\sqrt[4]{x(1-x)^3}}{(1+x)^3}dx. \tag{4.7}$$

如第二章第 7 段例2 所指出，在复平面上取线段[0,1]为割线，得一区域D.在 D 内可以把 $\dfrac{\sqrt[4]{z(1-z)^3}}{(1+z)^3}$ 分成解析分枝；取在割线上沿取实值的那一枝．

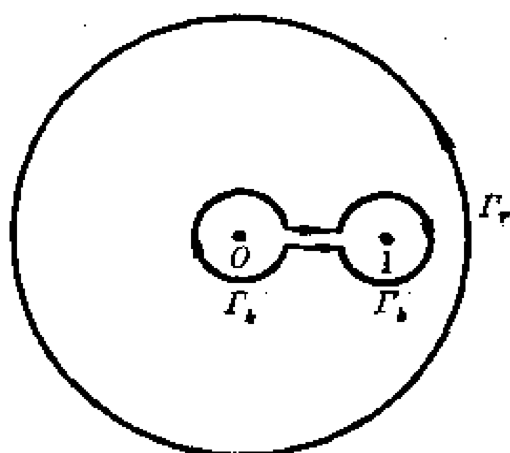


图 29

作闭曲线如图 29，其中 Γ_ε 及 Γ_r 分别是以 O 为中心、ε 及 r 为半径的圆，Γ_ε'是以 1 为心、ε 为半径的圆，在这里 $0<\varepsilon<\dfrac{1}{2}$，$r>2$．于是我们有

$$(1-i)\int_\varepsilon^{1-\varepsilon}\frac{\sqrt[4]{x(1-x)^3}}{(1+x)^3}dx$$

$$+\left(\int_{\Gamma_\varepsilon}+\int_{\Gamma_\varepsilon'}+\int_{\Gamma_r}\right)\frac{\sqrt[4]{z(1-z)^3}}{(1+z)^3}dz$$

$$=2\pi i\,\text{Res}\left(\frac{\sqrt[4]{z(1-z)^3}}{(1+z)^3},-1\right), \tag{4.8}$$

其中沿 Γ_ε 及 Γ_ε' 的积分是按顺时针方向取的，沿 Γ_r 的积分是按反时针方向取的.

与例 2 相类似，由

$$\lim_{z\to\infty} z\frac{\sqrt[4]{z(1-z)^3}}{(1+z)^3}=\lim_{z\to 0} z\frac{\sqrt[4]{z(1-z)^3}}{(1+z)^3}$$

$$=\lim_{z\to 1}(z-1)\frac{\sqrt[4]{z(1-z)^3}}{(1+z)^3}=0,$$

可以证明：当 $\varepsilon\to 0$，$r\to+\infty$ 时，(4.8)左边后三个积分趋近于零. 因此在(4.8)中取极限，就可看出积分 I 收敛，并且

$$(1-i)I=2\pi i\operatorname{Res}\left(\frac{\sqrt[4]{z(1-z)^3}}{(1+z)^3},-1\right).\qquad(4.9)$$

最后，求(4.9)右边的留数，为此，求所选取 $\sqrt[4]{z(1-z)^3}$ 的分枝在 $z=-1$ 的泰勒展式. 由于这一分枝在 $z=-1$ 的值是 $\sqrt[4]{2}(1+i)$(第二章第 7 段例 2)，所求展式是

$$\sqrt[4]{z(1-z)^3}=e^{i\frac{\pi}{4}}[1-(z+1)]^{\frac{1}{4}}[2-(z+1)]^{\frac{3}{4}}$$

$$=\sqrt[4]{2}(1+i)\left[1-\frac{1}{4}(z+1)-\frac{3}{32}(z+1)^2+\cdots\right]$$

$$\times\left[1-\frac{3}{8}(z+1)-\frac{3}{128}(z+1)^2+\cdots\right]$$

$$= \sqrt[4]{2}\,(1+i)\left[1-\frac{5}{8}(z+1)-\frac{3}{128}(z+1)^2+\cdots\right]^{①},$$

于是

$$\operatorname{Res}\left(\frac{\sqrt[4]{z(1-z)^3}}{(1+z)^3},-1\right)=-\frac{3\sqrt[4]{2}}{128}(1+i).$$

代入(4.9)，最后求得 $I=\dfrac{3\sqrt[4]{2}}{64}\pi$.

有些根式

$$[(x-a)^k(x-b)^{n-k}]^{\frac{1}{n}} \text{ 或 } [(x-a)^k(x-b)^{n-k}]^{-\frac{1}{n}}$$

(a 及 b 都是常数，n 及 k 都是正整数)与有理分式的乘积在某些有限区间上的积分，也往往可用解例 3 的方法去求出.

5. 亚纯函数的零点与极点的个数・儒歇定理 在本节中，我们应用留数来解决有关零点与极点的个数的一些问题.

现在证明下列引理：

引理 5.1 设 $f(z)$ 是在有界区域 D 内的亚纯函数，它在 D 的边界 C 上每一点解析，并且在 C 上没有零点，那么 $f(z)$ 在 D 内至多只有有限个零点和极点.

证 设在区域 D 中去掉所有的极点，得一区域 D_1. 显然，$f(z)$ 在 D_1 内不恒等于零. 我们要证明它在 D_1 内至多只有有限个零点. 假定不是这样，从 $f(z)$ 在 D 内亦即在 D_1 内的无穷个零点中，取出彼此不同的零点组成一个序列 $\{z_n\}$ $(n=1,2,3,\cdots)$. 显然，$\{z_n\}$ 是一个有界序列，因而有一收敛子序列 $\{z_{n_k}\}$ $(k=1,2,3,\cdots)$

---

① 我们有

$$[1-(z+1)]^{\frac{1}{4}}[2-(z+1)]^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{8}\,e^{i\frac{2k\pi+\pi}{4}}\left[1-\frac{1}{4}(z+1)+\cdots\right]$$
$$\times\left[1-\frac{3}{8}(z+1)\cdots\right].$$ 由于所取分枝在 $z=-1$ 的值是 $\sqrt[4]{2}\,(1+i)$，我们可取 $k=0$.

(参看第四章习题四第 2 题). 设 $\lim\limits_{k\to+\infty} z_{n_k}=z_0$.

不难看出，z_0 不可能在 D 及 C 以外，因为否则它既不是 D 的内点，也不是 D 的边界点，于是 z_0 有一邻域，在其中不含 D 内任何点；这与 z_0 是 $\{z_{n_k}\}$ 的极限点相矛盾.

其次，由于 $\lim\limits_{k\to+\infty} f(z_{n_k})=0$ 以及 $f(z)$ 在 C 上没有零点，可见 z_0 既不可能是极点，也不可能在 C 上，因而 z_0 在 D_1 内. 由第四章定理 6.2，这一结果与 $f(z)$ 在 D_1 内不恒等于零相矛盾. 这样就证明了 $f(z)$ 在 D_1 以及 D 内至多只有有限个零点.

考虑函数 $\dfrac{1}{f(z)}$，可以证明 $f(z)$ 在 D 内至多只有有限个极点.

不难看出，在引理 5.1 的假设中，把"亚纯函数"换成"解析函数"，那么 $f(z)$ 在 D 内至多只有有限个零点.

现在研究函数在其零点或极点的邻域内的一种性质. 设在 G: $0<|z-z_0|<R\ (\leqslant+\infty)$ 内，$f(z)$ 解析，不恒等于常数，并且没有零点；而 $z=z_0$ 是 $f(z)$ 的零点或极点. 于是在 G 内，

$$f(z)=(z-z_0)^k\varphi(z), \tag{5.1}$$

其中 $\varphi(z)$ 在 $|z-z_0|<R$ 内解析，并且不等于零，而 k 是一个不为零的整数. 当 z_0 是 $f(z)$ 的 n 阶零点时，$k=n$；当 z_0 是 n 阶极点时，$k=-n$. 由 (5.1)，我们有：在 G 内，

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{[(z-z_0)^k\varphi(z)]'}{(z-z_0)^k\varphi(z)}=\frac{k}{z-z_0}+\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}. \tag{5.2}$$

显然 $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ 在 G 内解析，在 z_0 有一阶极点，并且

$$\operatorname{Res}\left(\frac{f'}{f},\ z_0\right)=k.$$

当 z_0 是$f(z)$的 n 阶零点时，$\text{Res}\left(\frac{f'}{f},z_0\right)=n$；当 z_0 是 n 阶极点时，$\text{Res}\left(\frac{f'}{f},z_0\right)=-n$.

综合以上结果，我们可证明：

定理 5.1 设D是在复平面上的一个有界区域，其边界是一条或有限条简单闭曲线 C. 又设函数$f(z)$是在 D 内的亚纯函数；它在 C 上每一点解析，并且在 C 上没有零点，那么

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz=N-P, \tag{5.3}$$

在这里 N 及 P 分别表示$f(z)$在D 内零点及极点的总数，而且每个 k 阶零点或极点分别算作 k 个零点或极点.

证 由引理 5.1，$f(z)$在 D 内至多只有有限个零点和极点；设它们分别是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 和 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$，并且设它们的阶数分别是 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 和 $l_1,l_2,\cdots,l_n$. 于是根据上述结果，函数 $\frac{f'(z)}{f(z)}$ 在 D 内有一阶极点 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$. 而在这些点的留数分别是 $k_1,k_2\cdots,k_m,-l_1,-l_2,\cdots,-l_n$. 显然，在 D 内其他各点以及在 C 上，函数 $\frac{f'(z)}{f(z)}$ 解析. 于是根据留数定理，我们有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz=\sum_{p=1}^{m}\text{Res}\left(\frac{f'}{f},\alpha_p\right)+\sum_{q=1}^{n}\text{Res}\left(\frac{f'}{f},\beta_q\right)$$

$$=\sum_{p=1}^{m}k_p-\sum_{q=1}^{n}l_q=N-P.$$

定理证完.

(5.3)有简单的几何意义. 我们知道 $\frac{f'(z)}{f(z)}$ 是多值函数

$\mathrm{Ln}f(z)$的导数．设 C_j 是构成 C 的一条简单闭曲线．在 C_j 上每一点的一个邻域内，$\mathrm{Ln}f(z)$可以分成解析分枝．根据覆盖定理，可以找到有限个这样的邻域覆盖 C_j；把它们按照 C_j 关于 D 的正向排列成 $V_1, V_2, \cdots, V_{m'}$（图 30）．在 C_j 上取 $z_k \in V_{k-1} \cap V_k$ $(k=1,2,3,\cdots,m'; V_0=V_{m'})$[①]．

取定 $\mathrm{Ln}f(z)$在$z=z_1$ 的一值：

$$\ln|f(z_1)| + i\arg f(z_1) = w_1 .$$

依次确定 $\mathrm{Ln}f(z)$ 在 V_k 内的解析分枝：

$$g_k(z)=\ln f(z) \quad (\ln f(z_k)=w_k) \quad (k=1,2,\cdots,m'),$$

其中 $w_k=g_{k-1}(z_k)\,(k\geqslant 2)$．

由于在 $V_{k-1} \cap V_k$ 内，$g_{k-1}(z)$及 $g_k(z)$是同一对数函数的解析分枝，而且

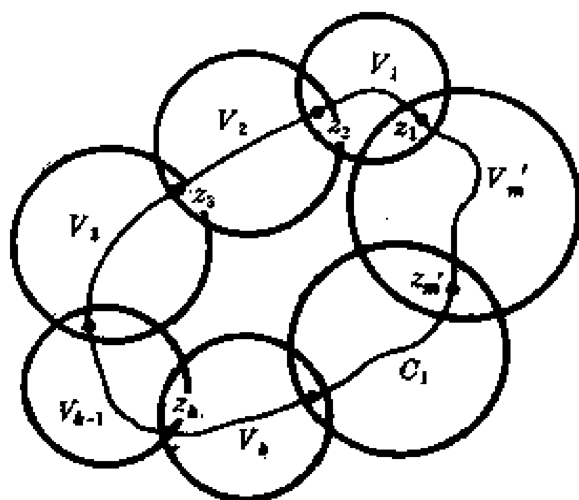


图 30

① $V_{k-1} \cap V_k$ 表示 V_{k-1} 及 V_k 的公有点所组成的集．

$$g_{k-1}(z_k)=g_k(z_k)=w_k,$$

我们有

$$g_{k-1}(z)=g_k(z)\ (z\in V_{k-1}\cap V_k;\ k=2,3,\cdots,m').$$

至于在 $V_{m'}\cap V_1$ 内，$g_{m'}(z)$及 $g_1(z)$也是同一对数函数的解析分枝．可是这时不一定有

$$g_{m'}(z_1)=g_1(z_1),$$

从而不一定有

$$g_{m'}(z)=g_1(z)\ (z\in V_{m'}\cap V_1).$$

于是

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_j}\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz=\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{m'}[g_k(z_{k+1})-g_k(z_k)]$$

$$=\frac{1}{2\pi i}[g_{m'}(z_1)-g_1(z_1)],$$

其中 $z_{m'+1}=z_1$．由于

$$g_k(z)=\ln|f(z)|+i\arg f(z),$$

我们有

$$g_{m'}(z_1)-g_1(z_1)=i\,\Delta_{C_j}\arg f(z),$$

其中 $\Delta_{C_j}\arg f(z)$表示当 z 沿 C_j 按关于 D 的正向绕行一周时，$\arg f(z)$连续变动的增量．这样，由定理 5.1 可得：

系 5.1　在定理5.1的假设下，我们有：

$$N-P=\frac{1}{2\pi}\Delta_C\arg f(z)$$

$$=\frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{n'}\Delta_{C_j}\arg f(z),\qquad(5.4)$$

在这里 $C_1,C_2,C_3,\cdots,C_{n'}$ 是构成 C 的所有闭曲线，对它们取

关于 D 的正向，而 N，P 及 $\Delta_{C_j}\arg f(z)$ 的意义与以上相同．

在定理 5.1 及系 5.1 中，把对 $f(z)$ 的假设换成："$f(z)$ 是在 D 内的解析函数，在 C 上每一点解析并且在 C 上没有零点"，(5.3)仍然成立，不过这时 $P=0$．根据这一结果，可推出下列儒歇定理：

定理 5.2 **设 D 是在复平面上的一个有界区域，其边界 C 是一条或有限条简单闭曲线．设函数 $f(z)$ 及 $g(z)$ 在 D 及 C 所组成的闭区域 $\overline{D}$ 上解析，并且在 C 上，$|g(z)|<|f(z)|$，那么在 D 上，$f(z)$ 及 $f(z)+g(z)$ 的零点的个数相同．**

证　由于在 C 上，$|g(z)|<|f(z)|$，可见 $f(z)$ 及 $f(z)+g(z)$ 在 C 上都没有零点．如果 N 及 N' 分别是 $f(z)$ 及 $f(z)+g(z)$ 在 D 内的零点的个数，那么由系 5.1，

$$2\pi N=\Delta_C\arg f(z),$$

$$\begin{aligned}2\pi N'&=\Delta_C\arg[f(z)+g(z)]\\&=\Delta_C\arg f(z)+\Delta_C\arg\left[1+\frac{g(z)}{f(z)}\right].\end{aligned}$$

我们要证明 $N=N'$．为此，只须证明

$$\Delta_C\arg\left[1+\frac{g(z)}{f(z)}\right]=0. \tag{5.5}$$

当 $z\in C$ 时，$|g(z)|<|f(z)|$，从而点 $w=1+\dfrac{g(z)}{f(z)}$ 总在 w 平面上的圆盘 $|w-1|<1$ 内．当 z 在 C_j 上连续变动一周时，$\arg w$ 从起始值连续变动仍然回到它的起始值（不围绕 $w=0$），亦即

$$\Delta_{C_j}\arg\left[1+\frac{g(z)}{f(z)}\right]=0,$$

在这里 C_j 的意义与系 5.1 中相同．于是(5.5)得证．证完．

儒歇定理可以用来决定方程在一些区域内根的个数．现举例如下：

例1 求方程
$$z^8-5z^5-2z+1=0$$
在 $|z|<1$ 内根的个数．

令
$$f(z)=-5z^5+1,\ g(z)=z^8-2z.$$
由于当 $|z|=1$ 时，我们有
$$|f(z)|\geqslant|5z^5|-1=4,$$
而
$$|g(z)|\leqslant|z|^8+2|z|=3,$$
已给方程在 $|z|<1$ 内根的个数与 $-5z^5+1$ 在 $|z|<1$ 内零点的个数相同，即5个．

例2 如果 $a>e$，求证方程 $e^z=az^n$ 在单位圆盘内有 n 个根．

我们只须证明 az^n-e^z 在 $|z|<1$ 内有 n 个零点．令
$$f(z)=az^n,\ g(z)=-e^z.$$
由于当 $|z|=1$ 时，
$$|f(z)|=a|z|^n=a>e.$$
$$|g(z)|=e^{\cos\theta}\leqslant e,$$
az^n-e^z 在 $|z|<1$ 内的零点的个数与 az^n 相同，即 n 个．

习 题 五

1．试求下列各解析函数或多值函数的解析分枝在指定各点的留数：

(1) $\dfrac{z^2}{(z^2+1)^2}$，在 $z=\pm i$；

(2) $\dfrac{1}{1-e^z}$，在 $z=2n\pi i$，n为整数；

(3) $\dfrac{\sqrt{z}}{1-z}$，在 $z=1$；

(4) $\sin\dfrac{1}{z-1}$，在$z=1$.

2. 函数 $\dfrac{\mathrm{Ln}\,z}{z^2-1}$ 的各解析分枝在 $z=\pm1$ 各有怎样的孤立奇点？求它们在这些点的留数.

3. 计算下列积分：

(1) $\displaystyle\int_C \frac{zdz}{(z-1)(z-2)^2}$，其中 C 是 $|z-2|=\dfrac{1}{2}$；

(2) $\displaystyle\int_C \frac{e^z dz}{z^2(z^2-9)}$，其中 C 是 $|z|=1$；

(3) $\displaystyle\int_C \mathrm{tg}\,\pi z dz$，其中 C 是 $|z|=n$ $(n=1,2,3,\cdots)$.

4. 设函数 $f(z)$ 在区域 $r_0<|z|<\infty$ 内解析，C 表示圆

$$|z|=r\,(0<r_0<r).$$

我们把积分

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C^-} f(z)dz$$

定义作为函数 $f(z)$在无穷远点的留数，记作 $\mathrm{Res}(f,\infty)$，在这里积分中的 C^- 表示积分是沿着 C 按顺时针方向取的．试证明：如果 α_{-1} 表示 $f(z)$在

$$r_0<|z|<+\infty$$

的罗朗展式中 $\dfrac{1}{z}$ 的系数，那么

$$\mathrm{Res}(f,\infty)=-\alpha_{-1}.$$

5. 试求下列函数在无穷远点的留数：

(1) $\dfrac{1}{z}$；　(2) $e^{\frac{1}{z}}$；

(3) $\dfrac{1}{(z^5-1)(z-3)}$.

[提示] 利用上题及第四章习题四第11题(2)的结果.

6. 试把关于留数的基本定理1.1转移到D是扩充复平面上含无穷远点区域情形.

7. 证明:如果$f(z)$在扩充复平面上除了有限个奇点外,在每一点解析,那么这函数在所有奇点上的留数(包括在无穷远点的留数)之和是零.

用此结果计算积分

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=2}\frac{dz}{(z^5-1)(z-3)}.$$

8. 求下列各积分:

(1) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^2\,dx}{(x^2+1)^2}$;

(2) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1-2a\cos\theta+a^2}$,其中$0<a<1$;

(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{a+\sin^2 x}$,其中$a>0$;

(4) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x\sin x}{x^2+1}\,dx$;

(5) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x(x^2+1)}\,dx$;

(6) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{(x^2+1)^2}\,dx$;

[提示] 取$\dfrac{(\mathrm{Ln}\,z)}{(z^2+1)^2}$的适当解析分枝沿图26中的闭曲线积分.

(7) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^{1-a}}{1+x^2}\,dx$,其中$0<a<2$;

(8) $\int_0^{+\infty} \frac{e^{ax}-e^{-ax}}{e^{\pi x}-e^{-\pi x}}\, dx$，其中 $-\pi<a<\pi$；

[提示] 从顶点为 $-X_1, X_2, X_2+2\pi i$ 以及 $-X_1+2\pi i\,(X_1, X_2>0)$的矩形中挖去以 0 及 i 为心的小半圆．考虑 $\frac{e^{az}}{e^{\pi z}-e^{-\pi z}}$ 沿这区域边界的积分．

(9) $\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^{\pi x}-e^{-\pi x}}\, dx$；

[提示] 在上题所考虑的矩形中，只挖去以 0 为心的小半圆．

(10) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\, dx$；

[提示] 这一积分可化为：$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos^2 x}{x^2}\, dx$．

(11) $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x-e^{-x}}{x}\, dx$；

[提示] 考虑第一象限内以半射线 $\operatorname{Arg} z=0$ 及 $\operatorname{Arg} z=\frac{\pi}{2}$ 为边界的扇形．

(12) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n}$ 其中整数 $n\geqslant 2$；

[提示] 考虑第一象限内以半射线 $\operatorname{Arg} z=0$ 及 $\operatorname{Arg} z=\frac{2\pi}{n}$ 为边界的扇形．

(13) $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2-1}\, dx$；

(14) $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x)(1+x)^2}}$；

(15) $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(x-2)\sqrt{1-x^2}}$；

(16) $\int_{C} \frac{dz}{\sqrt{1+z+z^2}}$，其中被积函数是有关多值函数的任一解析分枝，并且积分是沿圆 $|z|=2$ 按反时针方向取的．

9．试由

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}，$$

证明：

(1) $\int_{0}^{+\infty}\cos r^2 dr=\int_{0}^{+\infty}\sin r^2 dr=\frac{\sqrt{2\pi}}{4}$；

［提示］考虑在第一象限内以半射线 $\arg z=0$ 及 $\arg z=\frac{\pi}{4}$ 为边界的扇形．

(2) $\int_{0}^{+\infty} e^{-x^2}\cos 2hx dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-h^2}$，其中 $h>0$．

［提示］考虑以 $-X_1$，X_2，X_2+ih 及 $-X_1+ih$ 为顶点的矩形．

10．试证：在定理 5.1 的条件下，如果 $\varphi(z)$ 在闭区域 $\overline{D}$ 上解析，并且 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 及 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 分别是 $f(z)$ 在 D 内的零点和极点，而其阶数分别是 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 及 $l_1,l_2,\cdots,l_n$，那么

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C}\varphi(z)\frac{f'(z)}{f(z)}dz=\sum_{p=1}^{m}k_p\varphi(\alpha_p)-\sum_{q=1}^{n}l_q\varphi(\beta_q).$$

11．应用儒歇定理，求下列方程在 $|z|<1$ 内根的个数：

(1) $z^8-4z^5+z^2-1=0$，

［提示］令 $f(z)=z^8-4z^5$；

(2) $z^4-5z+1=0$，

［提示］令 $f(z)=-5z$；

(3) $z=\varphi(z)$，在这里 $\varphi(z)$在 $|z|\leqslant 1$ 上解析，并且 $|\varphi(z)|<1$.

12. 试用儒歇定理证明代数基本定理.

13. (1) 计算积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^3dx}{x^6+1}.$$

[提示] 考虑沿扇形$\left\{z\,\middle|\,|z|<R,0<\arg z<\frac{2\pi}{3}\right\}$边界的积分.

(2) 设 $P(z)$及 $Q(z)$是两个多项式，而且 $P(z)$的次数小于 $Q(z)$的次数；设 $Q(z)$在原点及正实轴上没有零点，证明：当整数 $n\geqslant 2$时，积分

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{P(x^n)}{Q(x^n)}\,dx$$

的值可以用 $\frac{P(z^n)}{Q(z^n)}$ 在角形 $A=\left\{z\,\middle|\,0<\arg z<\frac{2\pi}{n}\right\}$ 中的留数表示出来：

$$I=\frac{2i\pi}{1-e^{2i\pi/n}}\cdot\sum_{z_0\in Z}\operatorname{Res}\left(\frac{P(z^n)}{Q(z^n)},z_0\right),$$

其中 Z 是 $Q(z^n)$在 A 内的所有零点构成的集.

14. 设解析函数序列$\{f_n(z)\}$在区域 D 内内闭一致收敛于不恒等于零的函数 $f(z)$. 应用儒歇定理，证明：

(1) 如果 $f_n(z)$ $(n=1,2,\cdots)$在 D内没有零点，那么 $f(z)$ 在 D 内也没有零点；

(2) 用 Z_n 及 Z 分别表示 $f_n(z)$及$f(z)$在 D内的零点集，那么对于任何正整数 p，

$$Z\subset\overline{\bigcup_{n\geqslant p}Z_n},\text{ 而且 }Z=\bigcap_{p=1}^{+\infty}\overline{\bigcup_{n=p}Z_n},$$

其中 $\overline{\bigcup_{n\geqslant p}Z_n}$ 表示 $\bigcup_{n\geqslant p}Z_n$的闭包，即 $\bigcup_{n\geqslant p}Z_n$与其所有聚点组成的集的并集.

15. 设有 $\mathbb{C}$ 上的亚纯函数

$$f(z)=\frac{1}{\sin z\sinh z}①,$$

(1)求$f(z)$的极点及其阶数，并且计算$f(z)$在极点的留数．

(2)证明级数

$$g(z)=\frac{1}{z^2}+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k 4k\pi z^2}{\sinh k\pi\cdot(z^4-k^4\pi^4)}$$

表示$\mathbb{C}$上的一个亚纯函数，并且求$g(z)$的极点及在极点的留数．

(3)设以$(\pm1\pm i)(n\pi+\frac{\pi}{2})$为顶点的正方形的边界是$\gamma_n$($n=1,2,3,\cdots$)．

(a)证明当$z\in\gamma_n$时，

$$|f(z)|\leqslant\frac{1}{\sinh(n\pi+\frac{\pi}{2})}.$$

(b)设$\zeta\in\mathbb{C}-\gamma_n$，那么

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n}\frac{f(z)}{z-\zeta}dz=0,$$

其中γ_n是沿正向取的．

(c)设ζ不是$f(z)$的极点．当n充分大时，应用留数定理计算(b)中的积分；由此导出$f(z)=g(z)$.

(d)证明

$$\frac{1}{\cosh z-\cos z}=-\frac{i}{2}f\left(\frac{i-1}{2}z\right)$$

$$=\frac{1}{z^2}+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k 4k\pi z^2}{\sinh k\pi\cdot(z^4+4k^4\pi^4)}.$$

① 参看第二章习题二，第11题．sinhz及coshz也可分别记作shz及chz．

第六章　保形映射

§1．单叶解析函数的映射性质

1．一般概念　保形映射是函数论中最重要的概念之一，它是从物理学中的概念产生的，并且对物理学的许多领域有重要的应用．例如应用保形映射成功地解决了流体力学与空气动力学、弹性理论、磁场、电场与热场理论以及其他方面的许多实际问题．

在本章中，我们研究解析函数、特别是单叶解析函数的映射性质．设函数 $w=f(z)$ 在区域 D 内解析，并且在 D 内任意不同两点，函数所取的值不同．那么这函数就称为在区域 D 内的单叶解析函数，简称单叶函数．换句话说，单叶函数是确定一个内射的解析函数．

由第二章第 1 段，函数 $w=z+\alpha$ 及 $w=\alpha z$ 是在 z 平面上的单叶解析函数，它们把 z 平面映射成 w 平面，在这里 α 是复常数，并且对于第二个函数，$\alpha\neq 0$．

由第二章第 4 段，$w=e^z$ 在每一个带形

$$a<\operatorname{Im} z<a+2\pi$$

内单叶解析，并且把这带形映射成 w 平面上除去从原点出发的一条射线而得的区域，在这里 a 是任意一实常数．又由同章第 7 段，$w=z^\alpha$ 的一个解析分枝在以原点为顶点的某些角形内单叶解析，等等．

在以上例子中的单叶函数把 z 平面上的区域映射成 w 平面上的区域．一般单叶解析函数也有这些性质．不但如此，不恒等于常数的解析函数还把区域映射成区域，即确定一个从区域到区域是满射．下面我们要证明这一结论．有了这一结论，可见单叶函

数确定一个从区域到区域的双射，而一般解析函数却不一定具有这一性质．先证明下列引理：

引理 1.1 设函数 $f(z)$ 在 $z=z_0$ 解析，并且 $w_0=f(z_0)$．设 $f'(z_0)=f''(z_0)=\cdots=f^{(p-1)}(z_0)=0$，$f^{(p)}(z_0)\neq 0$ $(p=1,2,3,\cdots)$，那么 $f(z)-w_0$ 在 z_0 有 p 阶零点，并且对于充分小的正数 ρ，存在着一个正数 μ，使得当 $0<|w-w_0|<\mu$ 时，$f(z)-w$ 在 $0<|z-z_0|<\rho$ 内有 p 个一阶零点．

证 $f(z)-w_0$ 在 z_0 有 p 阶零点是显然的．为了完成引理的证明，要应用儒歇定理．由于 $f(z)$ 不恒等于常数，$f'(z)$ 不恒等于零，可以作出以 z_0 为心的一个开圆盘 $D:|z-z_0|<\rho$，其边界为 C，使得 $f(z)$ 在 $\overline{D}=D\cup C$ 上解析，并且使得 $f(z)-w_0$ 及 $f'(z)$ 除去 $z=z_0$ 外，在 $\overline{D}$ 上无其他零点，那么

$$\min_{z\in C}|f(z)-w_0|=\mu>0.$$

取 w，使 $0<|w-w_0|<\mu$．现应用儒歇定理，比较 $f(z)-w$ 及 $f(z)-w_0$ 在 D 内的零点的个数．由于

$$f(z)-w=[f(z)-w_0]+(w_0-w),$$

而当 $z\in C$ 时，

$$|f(z)-w_0|\geqslant \mu>|w-w_0|>0,$$

可见 $f(z)-w$ 及 $f(z)-w_0$ 在 D 内的零点个数同为 p（每个 n 阶零点算作 n 个零点）．

最后只须证明 $f(z)-w$ 在 D 内的每个零点 z_1 都是一阶的．这是因为 $w\neq w_0$，所以 $z_1\neq z_0$，而 $[f(z)-w]'_{z\neq z_0}\neq 0$．引理证完．

由引理 1.1 可以推出：

定理 1.1 设函数 $f(z)$ 在区域 D 内单叶解析，那么在 D 内任一点，$f'(z)\neq 0$．

假定在 $z_0\in D$，$f'(z_0)=0$，那么由引理 1.1，可导出与单叶

性相矛盾的结论．

由定理 1.1，如果一个函数在区域 D 内单叶解析，那么它的导数在 D 内任一点不等于零．可是这定理的逆定理不成立．例如 $w=e^z$ 的导数在 z 平面上任一点不为零，而这函数在整个 z 平面上不是单叶的．但由引理 1.1 可得：

定理 1.2 **设函数 $w=f(z)$ 在 $z=z_0$ 解析，并且 $f'(z_0)\neq 0$，那么 $f(z)$ 在 z_0 的一个邻域内单叶解析．**

现证明下面定理：

定理 1.3 **设函数 $w=f(z)$ 在区域 D 内解析，并且不恒等于常数，那么 $D_1=f(D)$ 是一区域，即 f 确定从 D 到 D_1 的一个满射．**

证 先证明 D_1 是一开集，也就是证明任一点 $w_0\in D_1$ 是 D_1 的内点．设 $z_0\in D$，并且 $f(z_0)=w_0$．由引理 1.1，可以找到一个正数 μ，使得对于任何满足 $|w_1-w_0|<\mu$ 的复数 w_1，我们有 $z_1\in D$，使 $f(z_1)=w_1$．因此开圆盘 $|w-w_0|<\mu$ 包含在 D_1 内，亦即 w_0 是 D_1 的内点（图 31）．

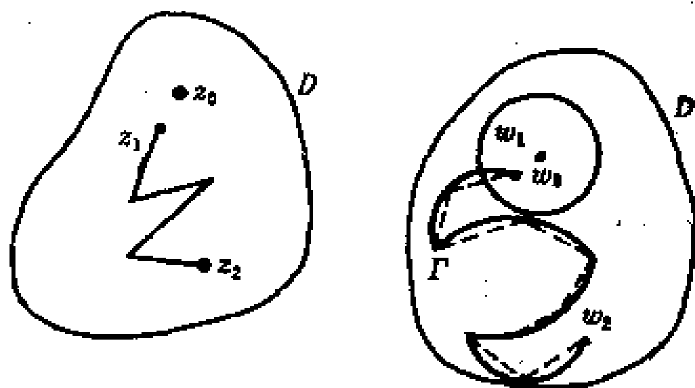


图 31

其次，证明在 D_1 内任意不同两点 w_1 及 w_2 可以用在 D_1 内的一条折线连接起来．我们有 z_1，$z_2\in D$，使得 $f(z_1)=w_1$，$f(z_2)=w_2$．由于 D 是一区域，在 D 内有折线

$$z=z(t)\ (a\leqslant t\leqslant b)$$

连接 z_1 及 z_2，在这里 $z_1=z(a)$，$z_2=z(b)$．函数 $w=f(z)$把这条折线上每一条线段映射成 D_1 内一条光滑曲线，从而把这折线映射成 D_1 内连接 w_1 及 w_2 的一条分段光滑曲线 Γ：

$$w=f(z(t))\ (a\leqslant t\leqslant b).$$

另一方面，由于 Γ 是 D_1 内的一个紧集，根据覆盖定理，它可以被 D_1 内有限个开圆盘所覆盖，从而在 D_1 内可以作出连接 w_1 及 w_2 的折线 Γ_1，定理得证．

如果 $w=f(z)$在区域 D 内单叶解析，那么由定理 1.3，它把区域 D 双射成区域 $D_1=f(D)$. 于是 $w=f(z)$有一个在 D_1 内确定的反函数 $z=\varphi(w)$．可以证明：

定理 1.4 设函数 $w=f(z)$在区域 D 内单叶解析，并且 $D_1=f(D)$，那么 $w=f(z)$有一个在 D_1 内单叶解析的反函数 $z=\varphi(w)$，并且如果 $w_0\in D_1$，$z_0=\varphi(w_0)$，那么

$$\varphi'(w_0)=\frac{1}{f'(z_0)}. \tag{1.1}$$

证 先证 $z=\varphi(w)$在 D_1 内任一点 $w=w_0$ 连续．由引理 1.1，任给 $\varepsilon>0$，选取这一引理结论中的正数 ρ 及 μ，使得 $\rho<\varepsilon$，那么当 $|w-w_0|<\mu$ 时，

$$|\varphi(w)-\varphi(w_0)|<\rho<\varepsilon.$$

因此 $z=\varphi(w)$在 D_1 内任一点连续．

现证明(1.1)．当 $w\in D_1$，$w\neq w_0$，并且 $z=\varphi(w)$时，我们有 $z\in D$，$z\neq z_0$．于是

$$\frac{\varphi(w)-\varphi(w_0)}{w-w_0}=\frac{z-z_0}{w-w_0}=1\Big/\frac{w-w_0}{z-z_0}.$$

因为当 $w\to w_0$ 时，$z=\varphi(w)\to z_0=\varphi(w_0)$，所以

$$\lim_{w\to w_0}\frac{\varphi(w)-\varphi(w_0)}{w-w_0}=1\Big/\lim_{z\to z_0}\frac{w-w_0}{z-z_0}=1\Big/\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

$$=\frac{1}{f'(z_0)}.$$

于是(1.1)得证.

2. 导数的几何意义 设 $w=f(z)$ 是区域 D 内的单叶解析函数. 设 $z_0\in D$，$w_0=f(z_0)$. 由第1段中所述结果，$f'(z_0)\neq 0$. 考虑在 D 内过 z_0 的一条简单光滑曲线 C:

$$z=z(t)=x(t)+iy(t)\quad(a\leqslant t\leqslant b),$$

其中 $x(t)$ 及 $y(t)$ 是 $z(t)$ 的实部和虚部. 设 $z(t_0)=z_0$ ($t_0\in[a,b]$).

由于

$$\frac{dz}{dt}=z'(t)=x'(t)+iy'(t),$$

曲线 C 在 $z=z_0$ 的切线与实轴的夹角是 $z'(t_0)$ 的辐角 $\operatorname{Arg} z'(t_0)$. 现作证明如下:

作通过曲线 C 上之点 $z_0=z(t_0)$ 及 $z_1=z(t_1)$ 的割线. 由于割线的方向与向量 $\dfrac{z_1-z_0}{t_1-t_0}$ 的方向一致，可以看出：只要当 t_1 趋近于 t_0 时，向量 $\dfrac{z_1-z_0}{t_1-t_0}$ 与实轴的夹角 $\arg\dfrac{z_1-z_0}{t_1-t_0}$ 连续变动趋近于极限，那么当 z_1 趋近于 z_0 时，割线确有极限位置，即为曲线 C 在 $z=z_0$ 的切线的位置. 但由光滑曲线的条件，极限

$$\lim_{t_1\to t_0}\frac{z_1-z_0}{t_1-t_0}=z'(t_0)\neq 0$$

存在，因此下列极限也存在:

$$\lim_{t_1 \to t_0} \arg \frac{z_1 - z_0}{t_1 - t_0} = \arg z'(t_0); \qquad (2.1)$$

它就是曲线 C 在 z_0 处切线与实轴的夹角，在这里辐角是连续变动的，并且极限式两边辐角的数值是相应地适当选取的.

函数 $w=f(z)$把简单光滑曲线 C 映射成过 $w_0=f(z_0)$的一条简单曲线 Γ：

$$w=f(z(t))(a \leqslant t \leqslant b).$$

由于 $\frac{dw}{dt}=f'(z(t))z'(t)$, 可见 Γ 也是一条光滑曲线；它在 w_0 的切线与实轴的夹角是

$$\arg f'(z(t_0))z'(t_0)=\arg f'(z_0)+\arg z'(t_0). \qquad (2.2)$$

由(2.1)及(2.2)，Γ 在 w_0 处切线与实轴的夹角及 C 在 z_0 处切线与实轴的夹角相差为 $\arg f'(z_0)$. **这一数值与曲线 C 的形状及在 z_0 处的切线的方向无关.**

设在 D 内过 z_0 还有一条简单光滑曲线 C_1：$z=z_1(t)$，函数 $w=f(z)$把它映射成为一条简单光滑曲线 Γ_1：$w=f(z_1(t))$. 与上面一样，C_1 及 Γ_1 在 z_0 及 w_0 处切线与实轴的夹角分别是 $\arg z_1'(t_0)$及

$$\arg f'(z_1(t_0))z_1'(t_0)=\arg f'(z_0)+\arg z_1'(t_0), \qquad (2.3)$$

比较(2.2)及(2.3)，就可看出在 w_0 处曲线 Γ 到曲线 Γ_1 的夹角恰好等于在 z_0 处曲线 C 到 C_1 的夹角(图 32)：

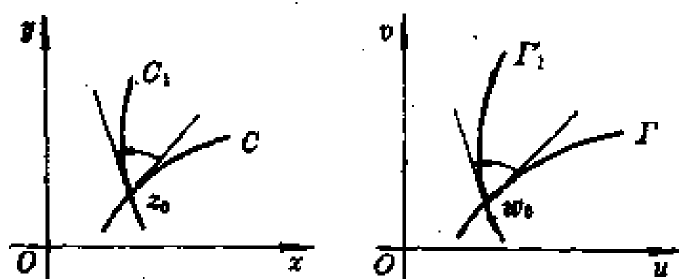


图 32

$$\arg f'(z_1(t_0))z_1'(t_0)-\arg f'(z(t_0))z'(t_0)$$
$$=\arg z_1'(t_0)-\arg z'(t_0).$$

这样，用单叶解析函数作映射时，曲线间的夹角的大小及方向保持不变．这一性质称为单叶解析函数所作映射的保角性．

以上对单叶解析函数的导数的辐角作了几何解释，现在再说明它的模的几何意义．根据以上假设，我们有：

$$|f'(z_0)|=\lim_{z\to z_0}\frac{|f(z)-f(z_0)|}{|z-z_0|}.$$

由于 $|f'(z_0)|$ 是比值 $\dfrac{|f(z)-f(z_0)|}{|z-z_0|}$ 的极限，它可以近似地表示这种比值．在 $w=f(z)$所作映射下，$|z-z_0|$ 及 $|f(z)-f(z_0)|$ 分别表示 z 平面上向量 $z-z_0$ 及 w 平面上向量 $f(z)-f(z_0)$的长度，这里向量 $z-z_0$ 及$f(z)-f(z_0)$的起点分别取在 z_0 及 $f(z_0)$．当 $|z-z_0|$ 较小时，$|f'(z_0)|$ 近似地表示通过映射后，$|f(z)-f(z_0)|$ 对 $|z-z_0|$ 的伸缩倍数，而且这一倍数与向量 $z-z_0$ 的方向无关．我们把 $|f'(z_0)|$ 称为在点 z_0 的伸缩率.

现在用几何直观来说明单叶解析函数所作映射的意义．设 $w=f(z)$是在 D 内解析的函数，$z_0\in D$，$w_0=f(z_0)$，$f'(z_0)\neq 0$，那么 $w=f(z)$把 z_0 的一个邻域内任一小三角形映射成含 w_0 的一个区域内的曲边三角形．这两三角形对应角相等，对应边近似地成比例．因此这两三角形近似地是相似形．此外，$w=f(z)$还把半径充分小的圆 $|z-z_0|=\rho$ 近似地映射成圆

$$|w-w_0|=|f'(z_0)|\rho\ (0<\rho<+\infty).$$

根据上述理由，我们把单叶解析函数所确定的映射称为保形映射或映照，或称为共形映射或保角映射．这种映射把区域双射成区域，它在每一点保角，并且在每一点具有一定的伸缩率.

§2. 分式线性函数及其映射性质

3．分式线性函数 线性函数是在复变函数论中经常用到的工具，在研究保形映射的一般理论以及作某些简单区域的保形映射时都要应用到它．所谓分式线性函数就是指下列形状的函数：

$$w=\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}, \tag{3.1}$$

这里 α,β,γ 及 δ 是复常数，而且 $\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0$．上列最后条件是为了保证函数(3.1)不恒等于常数．在 $\gamma=0$ 时，我们把(3.1)称为整线性函数．

函数(3.1)的反函数

$$z=\frac{-\delta w+\beta}{\gamma w-\alpha} \tag{3.2}$$

也是分式线性函数，其中 $(-\delta)(-\alpha)-\beta\gamma\neq 0$．

显然，当 $\gamma=0$ 时，函数(3.1)是把 z 平面双射到 w 平面，即把 $\mathbb{C}$ 双射到 $\mathbb{C}$ 的单叶解析函数；当 $\gamma\neq 0$ 时，函数(3.1)是把 $\mathbb{C}-\{-\frac{\delta}{\gamma}\}$ 双射到 $\mathbb{C}-\{\frac{\alpha}{\gamma}\}$ 的单叶解析函数．

我们可以把函数(3.1)的定义域及值域推广到扩充复平面 $\mathbb{C}_\infty$．当 $\gamma=0$ 时，约定(3.1)把 $z=\infty$ 映射成 $w=\infty$；当 $\gamma\neq 0$ 时，约定(3.1)把 $z=-\frac{\delta}{\gamma}$ 及 $z=\infty$ 分别映射成 $w=\infty$ 及 $w=\frac{\alpha}{\gamma}$．于是(3.1)把扩充 z 平面双射到扩充 w 平面，即把 $\mathbb{C}_\infty$ 双射到 $\mathbb{C}_\infty$．

现在把保形映射的概念扩充到无穷远点及其邻域，如果 $t=\frac{1}{f(z)}$ 把 $z=z_0$ 及其一个邻域保形映射成 $t=0$ 及其一个邻

域，那么我们说 $w=f(z)$ 把 $z=z_0$ 及其一个邻域保形映射成 $w=\infty$ 及其一个邻域．如果 $t=\dfrac{1}{f(1/\zeta)}$ 把 $\zeta=0$ 及其一个邻域保形映射成 $t=0$ 及其一个邻域，就说 $w=f(z)$ 把 $z=\infty$ 及其一个邻域保形映射成 $w=\infty$ 及其一个邻域．根据这些定义，函数(3.1)把扩充 z 平面保形映射成扩充 w 平面，即把 $\mathbb{C}_\infty$ 保形映射成 $\mathbb{C}_\infty$．

函数(3.2)是(3.1)的反函数．对于它有与上述相应的说明．

一般分式线性函数是由下列四种简单的函数叠合而得的：

(1) $w=z+\alpha$（α 为一复数）；

(2) $w=e^{i\theta}z$（θ 为一实数）；

(3) $w=rz$（r 为一正实数）；

(4) $w=\dfrac{1}{z}$．

事实上，我们有：

$$w=\frac{\alpha z+\beta}{\delta}=\frac{\alpha}{\delta}\left(z+\frac{\beta}{\alpha}\right)\qquad(\gamma=0),$$

$$w=\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}=\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2\left(z+\dfrac{\delta}{\gamma}\right)}\qquad(\gamma\neq 0).$$

把 z 及 w 看作同一复平面上的点．由第二章第 1 段中例 1—例 3，我们有：

(1) $w=z+\alpha$ 确定一个平移；

(2) $w=e^{i\theta}z$ 确定一个旋转；

(3) $w=rz$ 确定一个以原点为相似中心的相似映射；

(4) $w=\dfrac{1}{z}$ 是由映射 $z_1=\dfrac{1}{\bar{z}}$ 及关于实轴的对称映射 $w=\overline{z_1}$

叠合而得.

4.分式线性函数的映射性质 现在我们研究一般分式线性函数的映射性质.

我们约定,把扩充复平面上任一直线看成半径为无穷大的圆.根据这一约定,我们有:

定理 4.1 在扩充复平面上,分式线性函数把圆映射成为圆.

这一性质称为分式线性函数所确定映射的保圆性.

证 我们已知,分式线性函数所确定的映射,是平移、旋转、相似映射以及 $w=\frac{1}{z}$ 型的函数所确定的映射组成的. 前三种映射显然把圆映射成为圆,现在只须证明 $w=\frac{1}{z}$ 也把圆映射成为圆.

在圆的方程

$$a(x^2+y^2)+bx+cy+d=0 \tag{4.1}$$

(如果 $a=0$,这表示一条直线)中,代入

$$x^2+y^2=z\bar{z}, x=\frac{z+\bar{z}}{2}, y=\frac{z-\bar{z}}{2i},$$

则得圆的复数表示:

$$az\bar{z}+\bar{\beta}z+\beta\bar{z}+d=0, \tag{4.2}$$

在这里 a, b, c, d 是实常数,$\beta=\frac{1}{2}(b+ic)$是复常数.

函数 $w=\frac{1}{z}$ 把(4.2)映射成为

$$dw\bar{w}+\beta w+\bar{\beta}\bar{w}+\alpha=0,$$

亦即 w 平面上的圆(如果 $d=0$,它表示一条直线,即扩充 w 平面上半径为无穷大的圆).定理证完.

设分式线性函数(3.1)把扩充 z 平面上的圆 C 映射成为扩充

w 平面上的圆 C'. 于是 C 及 C' 把这两个扩充复平面分别分成两个没有公有点的区域 D_1, D_2 及 D_1', D_2', 其边界分别是 C 及 C'. 可以证明(3.1)把 D_1 映射成 D_1' 或 D_2' 之中的一个区域.

事实上,设 z_1 及 $z_2 \in D_1$, $z_1 \neq z_2$, z_1 及 $z_2 \neq \infty$, 并且设 z_1 及 z_2 关于(3.1)的象 w_1 及 $w_2 \neq \infty$, 那么可以作出连接 z_1 及 z_2 的折线 $P \subset D_1$. 由覆盖定理, 可以作出一个区域 R_1, 使得 $P \subset R_1 \subset D_1$. (3.1)把 R_1 双射到扩充 w 平面上一个区域 R_1'. 于是 w_1 及 $w_2 \in R_1'$. 假定 $w_1 \in D_1'$, $w_2 \in D_2'$, 那么在 R_1' 内连接 w_1 及 w_2 的一条折线 P_1' 必然与 C' 相交. 但 P_1' 的原象在 R_1 内, 从而不可能与 C 相交. 于是得出矛盾. 因此 w_1 及 w_2 必然同时属于 D_1' 或 D_2'. 当 z_1, z_2, w_1, w_2 之中有些是 ∞ 时, 不难推出同样结论. 由此可见, (3.1)把 D_1 内射到 D_1' 或 D_2'; 同样, 它也把 D_2 内射到 D_2' 或 D_1', 从而有关内射也是满射和双射.

至于(3.1)究竟把 D_1 映射成 D_1' 还是 D_2', 可以通过检验 D_1 中任一点的象来决定.

既然分式线性函数(3.1)把扩充 z 平面上的圆映射成为扩充 w 平面上的圆, 那么在扩充 z 平面及扩充 w 平面上分别取定一圆 C 及 C', 是否可以找到一个形如(3.1)的函数把 C 映射成 C'? 为了解决这一问题, 先证明:

定理 4.2 对于扩充 z 平面上任意三个不同的点 z_1, z_2, z_3 以及扩充 w 平面上任意三个不同的点 w_1, w_2, w_3, 存在唯一的分式线性函数, 把 z_1, z_2, z_3 分别映射成 w_1, w_2, w_3.

证 先考虑已给各点都是有限点情形. 设所求分式线性函数是(3.1), 那么由

$$w_k = \frac{\alpha z_k + \beta}{\gamma z_k + \delta} \quad (k=1,2,3). \tag{4.3}$$

算出 $w-w_1$, $w-w_2$, w_3-w_1, w_3-w_2, 并且消去 α, β, γ, δ, 就得到

$$\frac{w-w_1}{w-w_2}:\frac{w_3-w_1}{w_3-w_2}=\frac{z-z_1}{z-z_2}:\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}. \qquad (4.4)$$

从(4.4)可解出所求的分式线性函数(3.1).这一分式线性函数是唯一的.事实上,假定有另一函数

$$w=\frac{\alpha_1 z+\beta_1}{\gamma_1 z+\delta_1} \qquad (3.1')$$

满足已给条件,那么在(3.1′)代入已给数值,并且消去α_1,β_1,γ_1及δ_1,我们仍然得到(4.4),从而(3.1)及(3.1′)表示同一分式线性函数.

其次,如果已给各点除$w_3=\infty$外,都是有限点,那么所求函数有下列形式:

$$w=\frac{\alpha z+\beta}{\gamma(z-z_3)},$$

并且

$$w_k=\frac{\alpha z_k+\beta}{\gamma(z-z_3)} \qquad (k=1,2).$$

算出$w-w_1$及$w-w_2$,并且消去α,β及γ,就得到

$$\frac{w-w_1}{w-w_2}=\frac{z-z_1}{z-z_2}:\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}. \qquad (4.5)$$

由此可解出所求函数,与上面类似,可以看出它是唯一的.

粗略地说,在(4.4)中令$w_3\to\infty$就得到(4.5).

对于z_1,z_2,z_3,w_1,w_2,w_3中有一些数为无穷大的另一些情况,也可推出与(4.4)及(4.5)相类似的结果.读者自己可完成定理的证明.

等式(4.4)及(4.5)的左边及右边分别称为w_1,w_2,w,w_3以及z_1,z_2,z,z_3的交比,分别记作(w_1,w_2,w,w_3)及$(z_1,z_2,$

z, z_3). 由此可得：

系 4.1　在分式线性函数所确定的映射下，交比不变.

设一分式线性函数把扩充z平面上任意不同的四点z_1, z_2, z_3, z_4映射成扩充w平面上四点w_1, w_2, w_3, w_4，那么

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = (w_1, w_2, w_3, w_4).$$

从定理4.2还可推出：

定理4.3　扩充z平面上任何一个圆，可以用一个分式线性函数映射成扩充w平面上任何一个圆.

事实上，在z平面及w平面的已给圆上，分别选不同三点z_1, z_2, z_3及不同三点w_1, w_2, w_3，那么把z_1, z_2, z_3分别映射成w_1, w_2, w_3的分式线性函数，就把过z_1, z_2, z_3的圆，映射成过w_1, w_2, w_3的圆.

我们还讲述分式线性函数的另一个重要的映射性质. 这里先引进一个定义. 我们已经知道关于直线(半径为无穷大的圆)的对称点的定义. 现在对于半径为有限的圆，引进两点对称的定义如下：设已给圆C: $|z-z_0| = R$ $(0<R<+\infty)$. 如果两个有限点z_1及z_2在过z_0的同一射线上，并且

$$|z_1 - z_0||z_2 - z_0| = R^2,$$

那么我们说z_1及z_2是关于圆C的对称点. 我们还说z_0及∞是关于圆C的对称点. 我们有下列定理：

定理4.4　如果分式线性函数把z平面上的圆C映射成w平面上的圆C'，那么它把关于圆C的对称点z_1及z_2，映射成关于圆C'的对称点w_1及w_2.

先证明对称点的一个基本性质：

引理4.1　两点z_1及z_2是关于圆C的对称点的必要与充分条件是：通过z_1及z_2的任何圆与圆C直交.

证　如果C是直线(半径为无穷大的圆)；或者C是半径为有限的圆，而z_1及z_2之中有一个是无穷远点，那么这一引理中

的结论是明显的.

现在考虑圆 C 为 $|z-z_0|=R\,(0<R<+\infty)$,而 z_1 及 z_2 都是有限点的情形.

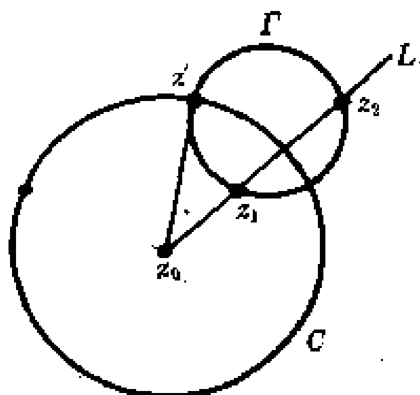


图 33

先证明条件的必要性.设 z_1 及 z_2 关于圆 C 为对称,那么通过 z_1 及 z_2 的直线(半径无穷大的圆)显然与圆 C 直交.作过 z_1 及 z_2 的任何(半径为有限的)圆 Γ(图 33).过 z_0 作圆 Γ 的切线,且设其切点是 z'.于是 $|z'-z_0|^2=|z_1-z_0|\cdot|z_2-z_0|=R^2$,从而 $|z'-z_0|=R$.这表明了 $z'\in C$,而上述 Γ 的切线恰好是圆 C 的半径.因此 Γ 与 C 直交.

其次,证明条件的充分性.过 z_1 及 z_2 作一(半径为有限的)圆 Γ,与圆 C 交于一点 z'.由于圆 Γ 与 C 直交,Γ 在 z' 的切线通过圆 C 的心 z_0.显然,z_1 及 z_2 在这切线的同一侧.又过 z_1 及 z_2 作一直线 L.由于 L 与 C 直交,它通过圆心 z_0.于是 z_1 及 z_2 在通过 z_0 的一条射线上.我们有

$$|z_1-z_0|\cdot|z_2-z_0|=R^2.$$

这样就证明了 z_1 及 z_2 是关于圆 C 的对称点.引理 4.1 得证.

现在来证明定理 4.4.过 w_1 及 w_2 的任何圆是由过 z_1 及 z_2 的圆映射得来的.由引理 4.1,过 z_1 及 z_2 的任何圆与圆 C 直交,从而由分式线性函数的保形性,过 w_1 及 w_2 的任何圆与圆 C' 直交.又由引理 4.1,w_1 及 w_2 关于圆 C' 为对称.

例 考虑扩充 w 平面上的一圆 $|w|=R$.分式线性函数

$$w=\frac{z-z_1}{z-z_2}$$

把 z_1 及 z_2 映射成为关于圆 $|w|=R$ 的对称点 0 及 ∞,把扩充 z

平面上的曲线

$$\left|\frac{z-z_1}{z-z_2}\right|=R \tag{4.6}$$

映射成为圆 $|w|=R$. 由定理 4.1 及 4.4,(4.6)表示在 z 平面上的一圆, z_1 及 z_2 是关于(4.6)的对称点.

5.两个特殊的分式线性函数 现在我们引进两个常用的特殊分式线性函数.

(1) 试求把上半平面 $\mathrm{Im}\,z>0$ 保形映射成圆盘 $|w|<1$ 的分式线性函数.

这种函数应当一方面把 $\mathrm{Im}\,z>0$ 内某一点 z_0 映射成 $w=0$, 一方面把 $\mathrm{Im}\,z=0$ 映射成 $|w|=1$. 由于线性函数把关于实轴 $\mathrm{Im}\,z=0$ 的对称点映射成关于圆 $|w|=1$ 的对称点, 所求函数不仅把 z_0 映射成 $w=0$, 而且把 $\overline{z_0}$ 映射成 $w=\infty$. 因此这种函数的形状是

$$w=\lambda\frac{z-z_0}{z-\overline{z}_0},$$

其中 λ 是一复常数. 其次, 如果 z 是实数, 那么

$$|w|=|\lambda|\left|\frac{z-z_0}{z-\overline{z}_0}\right|=|\lambda|=1.$$

于是 $\lambda=e^{i\theta}$, 其中 θ 是一实常数. 因此所求的函数应是

$$w=e^{i\theta}\frac{z-z_0}{z-\overline{z}_0}. \tag{5.1}$$

现在证明(5.1)确是所求的函数. 首先, 如上面所述, 由(5.1), 当 z 是实数时, $|w|=1$. 因此(5.1)把直线 $\mathrm{Im}\,z=0$ 映射成圆 $|w|=1$, 从而把上半平面 $\mathrm{Im}\,z>0$ 映射成 $|w|<1$ 或 $|w|>1$. 其次, 当 $z=z_0$ 时, $|w|=0<1$. 证完(参看定理 4.1后

面的说明）.

根据分式线性函数的性质，圆盘 $|w|<1$ 的直径是由通过 z_0 及 $\overline{z_0}$ 的圆在上半平面的弧映射成的；以 $w=0$ 为心的圆是由以 z_0 及 $\overline{z_0}$ 为对称点的圆映射成的；而 $w=0$ 是由 $z=z_0$ 映射成的．如图 34．

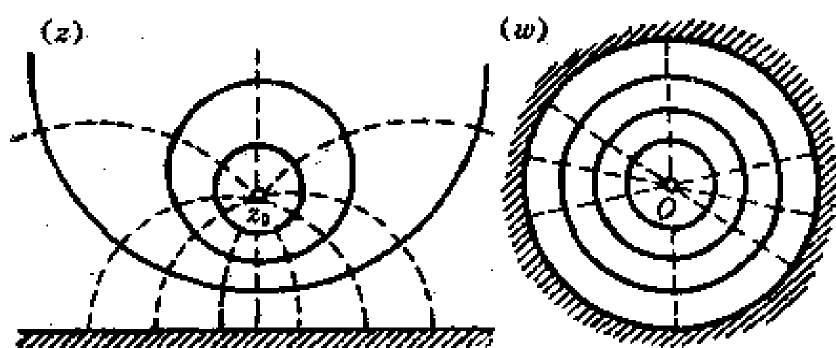


图 34

（2）试求把圆盘 $|z|<1$ 保形映射成圆盘 $|w|<1$ 的分式线性函数．

这种函数应当把 $|z|<1$ 内一点 z_0 映射成 $w=0$，并且把 $|z|=1$ 映射成 $|w|=1$．不难看出，与 z_0 关于圆 $|z|=1$ 为对称的点是 $\dfrac{1}{\overline{z}_0}$．与上面一样，这种函数还应当把 $\dfrac{1}{\overline{z}_0}$ 映射成 $w=\infty$；于是它的形状是

$$w=\lambda\frac{z-z_0}{z-1/\overline{z}_0}=\lambda_1\frac{z-z_0}{1-\overline{z}_0 z},$$

其中 λ 及 λ_1 是复常数．其次，当 $|z|=1$ 时，

$$1-\overline{z}_0 z=z\overline{z}-\overline{z}_0 z=z(\overline{z}-\overline{z}_0),$$

于是

$$|w|=|\lambda_1|\left|\frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z}\right|=|\lambda_1|=1.$$

因此 $\lambda_1=e^{i\theta}$，其中 θ 是一实数，而所求的函数应是

$$w=e^{i\theta}\frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z}. \tag{5.2}$$

现在证明(5.2)确是所求的函数．首先，如上面所述，由(5.2)，当 $|z|=1$ 时，$|w|=1$．因此(5.2)把 $|z|<1$ 映射成 $|w|<1$ 或 $|w|>1$．其次，当 $z=z_0$ 时，$|w|=0<1$，证完．

根据分式线性函数的性质，圆盘 $|w|<1$ 内的直径是由通过 z_0 及 $\dfrac{1}{\bar{z}_0}$ 的圆在 $|z|<1$ 内的弧映射成的；以 $w=0$ 为心的圆是以 z_0 及 $\dfrac{1}{\bar{z}_0}$ 为对称点的圆映射成的；而 $w=0$ 是由 $z=z_0$ 映射成的．如图 35．

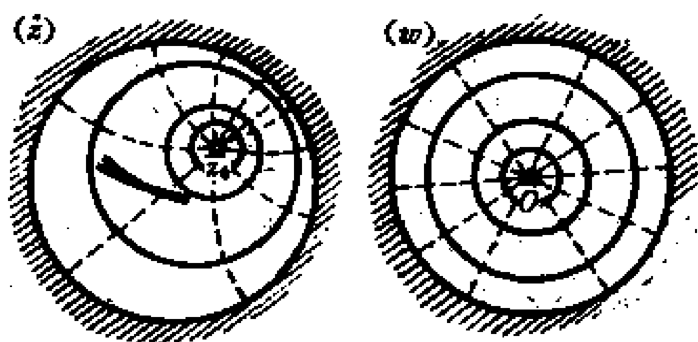


图 35

§3. 黎曼定理

6．最大模原理・希瓦尔兹引理 为了讲述保形映射理论中的黎曼定理，先引进最大模原理及希瓦尔兹引理．这些都是解析函数的重要性质；除对保形映射外，它们还有许多重要的应用．由

本章定理 1.2 可立即推出最大模原理：

定理 6.1　如果函数 $w=f(z)$ 在区域 D 内解析，并且 $|f(z)|$ 在 D 内某一点达到最大值，那么 $f(z)$ 在 D 内恒等于一常数.

证　由定理 1.3，假定 $f(z)$ 在 D 内不恒等于一常数，那么 $D_1=f(D)$ 是一区域. 设 $|f(z)|$ 在 $z_0 \in D$ 达到极大值. 显然，$w_0=f(z_0) \in D_1$，而且 w_0 必有一充分小的邻域包含在 D_1 内. 于是在这邻域内可找到一点 w' 满足 $|w'|>|w_0|$，从而在 D 内有一点 z' 满足 $w'=f(z')$ 以及 $|f(z')|>|f(z_0)|$，这与所设矛盾. 因此 $f(z)$ 在 D 内恒等于一常数.

定理 6.1 说明，在一区域内不恒等于常数的解析函数，其模数不可能在这区域内达到最大值. 由此可以证明：

系 6.1　设 D 是一有界区域，其边界为有限条简单闭曲线 C. 设函数 $f(z)$ 在 D 及其边界所组成的闭区域 $\overline{D}$ 上连续，在 D 内解析，并且不恒等于常数. 设 M 是 $|f(z)|$ 在 D 上的最大值，即 $f(z)$ 在 $\overline{D}$ 上的最大模，那么 $f(z)$ 在边界 C 上而且只在边界 C 上达到最大模.

证　由第二章定理 1.3，$f(z)$ 在 $\overline{D}$ 上达到它的最大模 M. 假定 $f(z)$ 在 $z_0 \in D$ 达到最大模 M，那么 $|f(z)|$ 在 z_0 达到极大值. 于是由定理 6.1，$f(z)$ 恒等于常数，与假定相矛盾. 因此 $f(z)$ 在 C 上达到最大模 M.

最大模原理有种种证法，这里讲的只是一种证法. 现在应用这原理来证明希瓦尔兹引理：

引理 6.1　设 $f(z)$ 是在开圆盘 $|z|<1$ 内的解析函数. 设 $f(0)=0$，并且当 $|z|<1$ 时，$|f(z)|<1$. 在这些条件下，

(1) 当 $|z|<1$ 时，$|f(z)| \leqslant |z|$；

(2) $|f'(0)| \leqslant 1$；

(3) 如果对于某一复数 $z_0\,(0<|z_0|<1)$，$|f(z_0)|=|z_0|$，或者如果 $|f'(0)|=1$，那么在 $|z|<1$ 内，

$$f(z)=\lambda z, \tag{6.1}$$

其中 λ 是一复常数，并且 $|\lambda|=1$.

证 由于 $f(0)=0$，$f(z)$在$|z|<1$内有泰勒展式

$$f(z)=\alpha_1 z+\alpha_2 z^2+\cdots+\alpha_n z^n+\cdots=zg(z), \qquad (6.2)$$

其中 $g(z)=\alpha_1+\alpha_2 z+\cdots$ 在 $|z|<1$ 内解析．因为当 $|z|<1$ 时，$|f(z)|<1$，所以对于 $|z|=r(0<r<1)$，我们有

$$|g(z)|=\left|\frac{f(z)}{z}\right|<\frac{1}{r}.$$

由最大模原理，当 $|z|\leqslant r$ 时，仍然有

$$|g(z)|<\frac{1}{r}.$$

令$r\to 1$，我们就得到：当$|z|<1$时，

$$|g(z)|\leqslant 1. \qquad (6.3)$$

于是当$0<|z|<1$时，

$$\left|\frac{f(z)}{z}\right|\leqslant 1, \qquad (6.3')$$

亦即

$$|f(z)|\leqslant |z|. \qquad (6.4)$$

由于 $f(0)=0$，(6.4) 当 $z=0$ 时仍成立．这样就证明了引理中结论(1)．由(6.3′)不难得到结论(2)．

设在某一点 $z_0(0<|z_0|<1)$，$|f(z_0)|=|z_0|$；或者设$|f'(0)|=1$．于是由(6.3)，并且由 $g(0)=f'(0)$，$|g(z)|$ 在 $|z|<1$ 内的点 z_0 或者 0 达到它的最大值 1．因此由最大模原理，在$|z|<1$ 内，$g(z)=\lambda$，其中 λ 是一个模为 1 的复常数．由此可见，当 $0<|z|<1$ 时，(6.1)成立；又由 $f(0)=0$，当 $z=0$ 时，(6.1)仍成立．引理中的结论(3)得证．

希瓦尔兹引理表明：设 $f(z)$在 $|z|<1$ 内解析．设在映射 $w=f(z)$下，$|z|<1$ 的象在 $|w|<1$ 内，并设 $0=f(0)$，那么

(1) $|z|<r(0<r<1)$的象在 $|z|\leqslant r$ 上；

(2) $|f'(0)|\leqslant 1$；

(3) 如果某一 $z_0(0<|z_0|<1)$和它的象的模相等，或者如果 $|f'(0)|=1$，那么 $f(z)=\lambda z$，其中 λ 是一模为 1 的复常数．

* **7．正规族**　在下段黎曼定理的证明中，我们要把映射函数表示为一个极值问题的解．为此，要用到解析函数族即解析函数集的一些性质．设 $\mathscr{F}$ 是区域 $D(\subset\mathbb{C})$内的一族解析函数．如果 $\mathscr{F}$ 中任何函数序列有一个子序列，在 D 内内闭（即内紧）一致收敛，那么我们说 $\mathscr{F}$ 是一个正规族[①]．对于 D 内任何紧集（有界闭集）K，如果存在着正数 $M=M(K)$，使得 $\forall f(z)\in\mathscr{F}$，$\forall z\in K$，$|f(z)|\leqslant M$，那么就说 $\mathscr{F}$ 在 D 内内闭（或内紧）一致有界；如果 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta=\delta(\varepsilon,K)$，使得 $\forall f(z)\in\mathscr{F}$，$\forall z'$及 $z''\in K$ 满足 $|z'-z''|<\delta$，$|f(z')-f(z'')|<\varepsilon$，那么就说 $\mathscr{F}$ 在 D 内内闭（或内紧）等度连续．先证明一个引理：

引理 7.1　如果区域 $D(\subset\mathbb{C})$内的解析函数族 $\mathscr{F}$ 在 D 内内闭一致有界，那么它在 D 内内闭等度连续．

证　设紧集 $K\subset D$，并且设 ∂D 与 K 的距离大于 $2\eta>0$．令 $K_\eta=\{\zeta\,|\,|\zeta-z|<2\eta,\ z\in K\}$．那么紧集 $\overline{K_\eta}=K_\eta\cup\partial K_\eta\subset D$．设 $M=M(\overline{K_\eta})$满足：$\forall f(z)\in\mathscr{F}$，$\forall z\in\overline{K_\eta}$，$|f(z)|\leqslant M$．

$\forall z'$及 $z''\in K$ 满足 $|z'-z''|<\eta$．作以 z'为心的圆 C：$|z-z'|=2\eta$，那么 $\forall f(z)\in\mathscr{F}$，

$$f(z')-f(z'')=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z'}\,d\zeta-\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z''}\,d\zeta$$

---

① 在研究亚纯函数时，这一定义需要推广。

$$= \frac{z' - z''}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z')(\zeta - z'')}.$$

当$\zeta \in C$时，$|\zeta - z'|$及$|\zeta - z''| > \eta$，因此$\forall f(z) \in \mathscr{F}$.

$$|f(z') - f(z'')| \leqslant \frac{|z' - z''|}{2\pi} \cdot \frac{M \cdot 4\pi\eta}{\eta^2} = \frac{2M|z' - z''|}{\eta},$$

于是$\forall z'$及$z'' \in K$满足$|z' - z''| < \delta = \dfrac{\varepsilon\eta}{\varepsilon + 2M}$（$<\eta$）时，我们有$|f(z') - f(z'')| < \varepsilon$. 引理得证.

现在可证明下列蒙泰尔定理：

定理 7.1　如果区域$D(\subset \mathbb{C})$内的解析函数族$\mathscr{F}$在D内内闭一致有界，那么$\mathscr{F}$是一个正规族.

证　设$E = \{z_k\}(k = 1, 2, \cdots)$在$D$内处处稠密. 例如可取$\{z_k\}$为$D$内虚、实部都是有理数的点所构成的集. 任取$\mathscr{F}$中的函数所构成的一个序列$\{f_n(z)\}$. 现证明可找到它的一个子序列在$E$中每一点收敛.

由假设，$\{f_n(z)\}$在$z = z_1$有界，于是可选取这序列的一个子序列$\{f_{1,n}(z)\}$，使得它在$z = z_1$收敛. 又由于$\{f_{1,n}(z)\}$在$z = z_2$有界，可选取这序列的一个子序列$\{f_{2,n}(z)\}$，使得它在$z = z_1$，z_2收敛. 依此类推，$\forall k > 1$，可选取$\{f_{k-1,n}(z)\}$的一个子序列$\{f_{k,n}(z)\}$，使得它在$z = z_1, z_2, \cdots, z_k$收敛. 我们可以看出，"对角线序列"$\{f_{k,k}(z)\}$在$E$中每一点收敛.

其次证明$\{f_{k,k}(z)\}$在D内任何紧集K上一致收敛. 对于K，$\forall \varepsilon > 0$，像在引理 7.1 的证明中那样确定$\delta > 0$. 取所有$z_m \in K \cap E$，并且作圆盘$|z - z_m| < \delta$. 显然这些圆盘覆盖K. 由覆

盖定理，可从其中选取有限个圆盘覆盖 K：设 $|z-z_m|<\delta(m=1,2,\cdots,p)$ 是这些圆盘．于是 K 中任一点 z' 必然属于某一圆盘 $|z-z_n|<\delta$ 内，从而由引理 7.1，$\forall k$，

$$|f_{kk}(z')-f_{kk}(z_n)|<\varepsilon .$$

另一方面，$\{f_{kk}(z)\}$ 在 $z=z_1,z_2,\cdots,z_p$ 收敛．于是对于 $\varepsilon>0$，$\exists N>0$，使得 $\forall k$ 及 $l>N$，

$$|f_{kk}(z_m)-f_{ll}(z_m)|<\varepsilon(m=1,2,\cdots,p).$$

$\forall z'\in K$，按照 $|z'-z_m|<\delta$ 确定 z_m．于是 $\forall k$ 及 $l>N$，

$$|f_{kk}(z')-f_{ll}(z')|\leqslant|f_{kk}(z')-f_{kk}(z_m)|+|f_{kk}(z_m)-f_{ll}(z_m)|$$

$$+|f_{ll}(z_m)-f_{ll}(z')|<3\varepsilon .$$

证完．

8．黎曼定理① 在第 5 段中，找到了在上半平面 $\mathrm{Im}\,z>0$ 内单叶的函数(特别是一个线性函数)，把 $\mathrm{Im}\,z>0$ 保形双射成圆盘 $|w|<1$．自然发生下列问题：任给 z 平面上的一个单连通区域 D，是否可以找到一个单叶函数把 D 保形双射成 $|w|<1$ 呢？这一问题不一定有解．例如如果 D 是 z 平面，其边界只含一点，即无穷远点，那么就找不到一个单叶函数 $w=f(z)$，把 z 平面保形双射成 $|w|<1$．事实上，假定有一个这样的函数 $w=f(z)$，那么它是一个有界的整函数，从而 $f(z)=$ 常数，与假定相矛盾．

黎曼映射定理可表述如下：

定理 8.1 设 D 是 z 平面 $\mathbb{C}$ 上的任何单连通区域，但不是整个 z 平面，并且 $z_0\in D$，那么有一个、并且只有一个在区域 D 内

① 黎曼定理的证明不属于复变函数课程的一般教学内容．

的单叶函数 $w=f(z)$，满足 $f(z_0)=0$，$f'(z_0)>0$[①]，并且把 D 保形双射成 $|w|<1$.

证 定理中映射函数的唯一性可用希瓦尔兹引理及最大模原理证明．假定两个函数 $w=f_1(z)$及 $w=f_2(z)$满足定理 8.1 中的条件．显然 $w=f_2(z)$的反函数 $z=\varphi_2(w)$把圆盘 $|w|<1$ 保形映射成区域 D．于是

$$F(w)=f_1[\varphi_2(w)]$$

把 $|w|<1$ 映射到本身，并且

$$F(0)=f_1[\varphi_2(0)]=f_1(z_0)=0.$$

由引理 6.1，

$$|F(w)|\leqslant|w|.$$

把 $w=f_2(z)$代入上式，我们有：当 $z\in D$ 时，

$$|f_1(z)|\leqslant|f_2(z)|.$$

交换 $f_1(z)$与 $f_2(z)$的地位．类似地有：当 $z\in D$ 时，

$$|f_2(z)|\leqslant|f_1(z)|.$$

所以当 $z\in D$ 时，

$$|f_1(z)|=|f_2(z)|.$$

因为函数 $f_1(z_0)=f_2(z_0)=0$，并且 $f_1'(z_0)>0$，$f_2'(z_0)>0$，所以 $\dfrac{f_1(z)}{f_2(z)}$ 在 D 内解析．又因这一函数的模恒等于 1，根据定理 6.1，我们有

$$f_1(z)=e^{i\theta}f_2(z),$$

其中 θ 是一实数．又由于

---

① 这一条件表明：过 $z=z_0$ 的光滑曲线 C，映射成过 $w=0$ 的光滑曲线 C_1，而 C 及 C_1 分别在 z_0 与 0 的切线有相同斜率．

$$f_1'(z_0)>0, f_2'(z_0)>0,$$

可推出 $e^{i\theta}=1$，从而 $f_1(z)\equiv f_2(z)$.

定理 8.1 表明，作出有关保形映射的单叶函数依赖于三个实参变数．事实上，$f(z_0)=0$ 及 $f'(z_0)>0$ 相当于三个含实数的方程．

证明定理 8.1 中映射函数存在要用到单连通区域的下述性质：

***引理 8.1** **设单连通区域 $D(\subset\mathbb{C})$ 内的解析函数 $\psi(z)$ 在 D 内没有零点，那么存在着在 D 内的一个解析函数 $g(z)$，使得 $\psi(z)=[g(z)]^2$.**

证 由假设，$\dfrac{\psi'(z)}{\psi(z)}$ 在 D 内解析．因此它在 D 内有原函数 $h(z)$. 显然 $h(z)$ 是 $\mathrm{Ln}\,\psi(z)$ 在 D 内的一个解析函数分枝，于是 $\psi(z)=e^{h(z)}$，从而 $g(z)=e^{h(z)/2}$ 满足引理中的结论．

***定理 8.1 的证(续)** 考虑在 D 内满足下列条件的单叶函数族 Σ：$\forall\varphi(z)\in\Sigma$，$w=\varphi(z)$ 确定从 D 到 $|w|<1$ 的一个映射，$\varphi(z_0)=0$，并且 $\varphi'(z_0)>0$. 我们要证明定理 8.1 中的 $f(z)$ 正是 Σ 中使得导数 $f'(z_0)$ 是极大值的函数. 证明步骤如下：

(1) 证明 $\Sigma\neq\emptyset$. 取 $\alpha\overline{\in}D$. 由引理 8.1，存在着 D 内的解析函数 $g(z)$，使得 $[g(z)]^2=z-\alpha$. 显然，$\forall z\in D$，$g(z)\neq 0$. $g(z)$ 是 D 内的一个单叶函数．事实上，$\forall z_1, z_2\in D$；如果 $g(z_1)=g(z_2)$，那么 $[g(z_1)]^2=[g(z_2)]^2$，从而 $z_1=z_2$. 于是 $w=g(z)$ 把区域 D 映射到区域 $g(D)$.

与上面类似，$\forall z_1$ 及 $z_2\in D$；如果 $g(z_1)=-g(z_2)$，那么仍然有 $z_1=z_2$. 由于 $g(z)$ 在 D 内不为零，区域 $g(D)$ 必然包含一个闭圆盘 $|w-g(z_0)|\leqslant r$，其中 $0<r<|g(z_0)|$. 于是 $g(D)$

$\bigcap\{w \mid |w+g(z_0)| \leqslant r\}=\varnothing$，因为否则这一交集中有一点 w'，而 w' 及 $-w'$ 在 D 内有同一原象，这是不可能的. 因此当 $z\in D$ 时，$|g(z)+g(z_0)|>r$，特别 $2|g(z_0)|>r$.

现证明函数

$$\varphi_0(z)=\frac{r}{4}\ \frac{|g'(z_0)|}{|g(z_0)|^2}\cdot\frac{g(z_0)}{g'(z_0)}\cdot\frac{g(z)-g(z_0)}{g(z)+g(z_0)}\in\Sigma.$$

事实上，由于 $g(z)$ 是 D 内的单叶函数，而且在 D 内，$|g(z)+g(z_0)|>r>0$，$\varphi_0(z)$ 也是 D 内的单叶函数，其次，不难算出

$$\varphi_0(z_0)=0,\ \varphi_0'(z_0)=\frac{r}{8}\cdot\frac{|g'(z_0)|}{|g(z_0)|^2}>0.$$

又因 $\forall z\in D$

$$\left|\frac{g(z)-g(z_0)}{g(z)+g(z_0)}\right|=|g(z_0)|\cdot\left|\frac{1}{g(z_0)}-\frac{2}{g(z)+g(z_0)}\right|$$

$$\leqslant|g(z_0)|\cdot\left[\frac{1}{|g(z_0)|}+\frac{2}{|g(z)+g(z_0)|}\right]$$

$$<|g(z_0)|\left(\frac{2}{r}+\frac{2}{r}\right)=\frac{4|g(z_0)|}{r}$$

所以 $|\varphi_0(z)|<1$，从而 $\varphi_0(z)\in\Sigma$.

(2) 设 $b=\sup\{\varphi'(z_0) \mid \varphi(z)\in\Sigma\}$ 证明 $b<+\infty$，并且 $\exists f(z)\in\Sigma$，使得 $f'(z_0)=b$.

由假设，$\exists\{\varphi_n(z)\}\subset\Sigma$，使得 $\varphi_n(z_0)\to b\ (n\to+\infty)$. 由定理 7.1，$\{\varphi_n(z)\}$ 是一正规族；于是可从其中找出一个子序列，使其在 D 内内闭收敛于一解析函数 $f(z)$. 为简单计，把这

子序列就记作$\{\varphi_n(z)\}$. 取极限，我们得到 $\forall z\in D$, $|f(z)|\leqslant 1$, $f(z_0)=0$, $f'(z_0)=b>0$, 由此可见，$b<+\infty$, 并且 $f(z)\neq$ 常数. 因此 $f(D)$是包含在$|w|<1$ 内的一个区域，从而 $\forall z\in D$, $|f(z)|<1$.

为了证明 $f(z)\in\Sigma$, 还只需证明 $\forall z_1\in D$, $\forall z_2\in D$, 但 $z_2\neq z_1$, 那么必然有 $f(z_2)\neq f(z_1)$. 作以z_2为心、包含在D内且不含z_1的闭圆盘K, 使得$f(z)-f(z_1)$在∂K 上没有零点. 于是 $\exists\ \delta>0$, 使得$\forall\ z\in\partial K$, $|f(z)-f(z_1)|>\delta$. 又由一致收敛性，当 n 充分大时，$\forall z\in\partial K$, $|(\varphi_n(z)-\varphi_n(z_1))-(f(z)-f(z_1))|<\delta$. 由儒歇定理，当 n 充分大时，$\varphi_n(z)-\varphi_n(z_1)$及$f(z)-f(z_1)$在$K$的内部的零点数同为零，从而 $f(z_2)-f(z_1)\neq 0$. 于是 $f(z)\in\Sigma$.

(3)证明 $f(D)=\{w\,|\,|w|<1\}$. 假定 $\exists w'$ 满足$|w'|<1$, 但 $w'\bar{\in} f(D)$. 那么由引理8.1，$\exists F(z)$在D内解析，使得

$$[F(z)]^2=\frac{f(z)-w'}{1-\overline{w}'f(z)}.$$

由第 5 段的(2)，$F(z)$ 是 D 内的单叶函数，并且$|F(z)|<1$. 令

$$G(z)=\frac{|F'(z_0)|}{F'(z_0)}\cdot\frac{F(z)-F(z_0)}{1-\overline{F(z_0)}F(z)}.$$

于是$G(z)$也是D内的单叶函数，$G(z_0)=0$,

$$G'(z_0)=\frac{|F'(z_0)|}{1-|F(z_0)|^2}=\frac{1+|w'|}{2\sqrt{|w'|}}\,b>b.$$

因此 $G(z)\in\Sigma$, 但上式与(2)相矛盾. 证完.

在定理8.1中，如果对所求单叶函数 $w=f(z)$不要求$f(z_0)=0$, $f'(z_0)>0$, 那么由第5段的(2)，把D双射成$|w|<1$的单叶函数有无穷多个.

由定理8.1，有无穷多个单叶函数把D双射成w平面上任

何不是全平面的单连通区域．

用分式线性函数作映射，可见这定理对于扩充 z 平面上的单连通区域也适用，所谓 D 是扩充 z 平面上的单连通区域，就是说 D 内任何闭简单连续曲线的内区域或者外区域中每一点属于 D．例如，多边形的外区域是单连通的还是多连通的，将根据我们是否把无穷远点包括在内而定．

黎曼定理在复变函数的理论及其应用上都有极其重要的意义．在理论上，它是近代复变函数的几何理论的起点．其次，在较复杂的区域内，要研究保形映射下的某些不变量，只须在较简单的区域内进行研究，然后应用保形映射就可得到所需要的结果．不但如此，在保形映射下，有些物理量的若干性质保持不变．因此，保形映射对于解决某些理论问题以及实际问题起着重要的作用．

黎曼定理指出了可把某些区域保形映射成单位圆盘．至于怎样作出具体区域的映射函数，还有待于研究．第 10 段及第七章中将举出作映射函数的一些简单的例子．

9．边界对应[①] 黎曼定理指出某些区域可以用单叶函数保形双射成圆盘，但不能说明已给区域与圆盘的边界之间是否有对应关系．对于以闭简单连续曲线即闭约当曲线为边界的曲线，有一个比较简单的结果（也可只用附录二中较特殊的结果）．

如果区域 D 以闭简单连续曲线 C 为边界，那么 C 上每一点都是可达点．这就是说，$\forall \zeta \in C$ 及 $\forall z_0 \in D$，那么可以作一条简单连续曲线连接 ζ 及 z_0，使这曲线除去 ζ 外完全在 D 内．

在一般情形下，一个区域的边界点不一定是可达点．例如考虑从正方形 $\{(x,y)|0<x,y<1\}$ 中除去 $\{(x,y)|x=\frac{1}{2n},$ $0<y\leqslant\frac{3}{4}\}$ 及 $\{(x,y)|x=\frac{1}{2n+1},\frac{1}{4}\leqslant y<1\}(n=1,2,$

① 下列边界对应定理的证明不属于复变函数课程的一般教学内容．

3,⋯)而得的区域 D,那么 y 轴上的每一个边界点 ζ 都不是可达点.事实上,否则可作一条参数为 t 的简单连续曲线连接 ζ 及 D 内一点 z_0(这曲线除去 ζ 外完全在 D 内).于是曲线上点的纵坐标 y 是 t 的连续函数;设它在 $t=t_1$ 时取值 $\operatorname{Im}\zeta=y_1$,当 $t\to t_1$ 时,y 应无限多次取大于 $\frac{3}{4}$ 及小于 $\frac{1}{4}$ 的值,从而不可能有 $y\to y_1$.这样就得到了矛盾.

现在应用上述性质证明一个引理.

引理 9.1 设 z 平面上单连通区域 D 的边界是一条闭简单连续曲线 C.设单叶函数 $w=f(z)$ 把 D 映射成单位圆盘 $|w|<1$,那么 $f(z)$ 在 D 内一致连续.

证 假定 $f(z)$ 在 D 内不一致连续,那么 $\exists\,\varepsilon_0>0$,$\exists\{z_n'\}$ 及 $\{z_n''\}\subset\mathbb{C}\ (n=1,2,\cdots)$,使得

$$|z_n'-z_n''|<\frac{1}{n},\ |f(z_n')-f(z_n'')|\geqslant\varepsilon_0. \tag{9.1}$$

由于 $\{z_n'\}$ 有界,它有一个子序列收敛于一点 ζ.现证明 $\zeta\in C$,为简单起见,把这子序列仍记作 $\{z_n'\}$.又因 $z_n'-z_n''\to 0$,所以

$$z_n'\to\zeta,\ z_n''\to\zeta\ \ (n\to+\infty)$$

假若 $\zeta\overline{\in}C$,那么 $\zeta\in D$,从而

$$f(z_n')-f(z_n'')\to f(\zeta)-f(\zeta)=0\ \ (n\to+\infty),$$

与(9.1)相矛盾.因此 $\zeta\in C$.

设 $w_n'=f(z_n')$,$w_n''=f(z_n'')$.由于 $\{w_n'\}$ 及 $\{w_n''\}$ 有界,可以从其中选取相应的收敛子序列;为简单起见,可以设 $w_n'\to w'$,$w_n''\to w''\ (n\to+\infty)$.由(9.1),

$$|w'-w''|\geqslant\varepsilon_0. \tag{9.2}$$

与上面类似,可以推出 $|w'|=|w''|=1$.

在 $|w|<1$ 内取两点 w_1 及 w_2,使得 $|w_1-w_2|\geqslant\varepsilon_0/2$.设

$f(z_1)=w_1$, $f(z_2)=w_2$，取正数 $R<|\zeta-z_1|$ 及 $|\zeta-z_2|$. 作以 ζ 为心、R 为半径的圆 K_R(图 36).

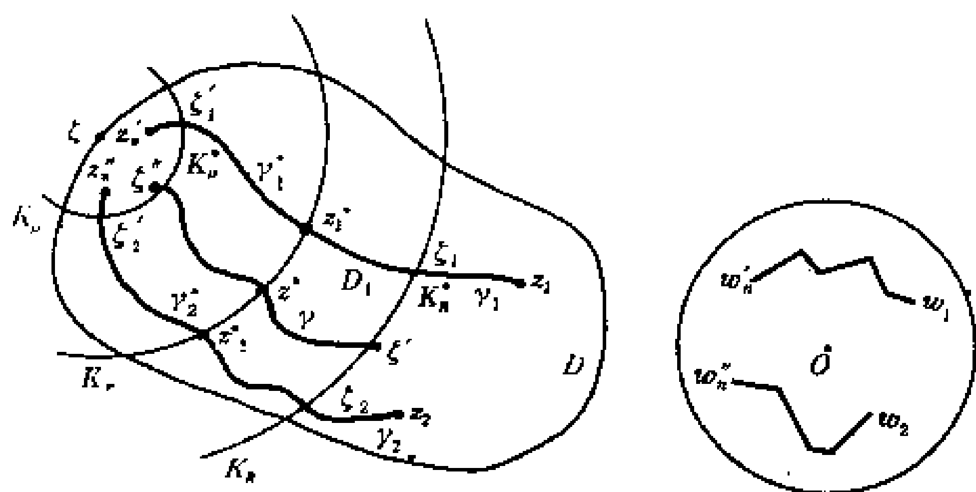


图 36

取 $\rho\in(0,R)$，使得

$$\frac{1}{4}\varepsilon_0^2\ln\frac{R}{\rho}>\pi. \tag{9.3}$$

作以 ζ 为心、ρ 为半径的圆盘，其边界是圆 K_ρ. 在这圆盘内取 z_n' 及 z_n''，使得 $|w_n'-w_n''|\geqslant\varepsilon_0/2$；由 (9.2)，当 n 充分大时，这是可以做到的.

在 $|w|<1$ 内作折线 $\widetilde{w_1w_n'}$ 及 $\widetilde{w_2w_n''}$，使得它们的距离 $\geqslant\varepsilon_0/2$. 设这两折线在 D 内的原像是曲线 γ_1 及 γ_2.

设一点从 z_n' 或 z_n'' 出发，沿 γ_1 或 γ_2 向 z_1 或 z_2 运动，首先遇到 K_R 上的点 ζ_1 或 ζ_2；设一点从 z_1 或 z_2 出发，沿 γ_1 或 γ_2 作相反方向的运动，首先遇到 K_ρ 上的点 ζ_1' 或 ζ_2'. 于是 ζ_1 与 ζ_2 以及 ζ_1' 与 ζ_2' 之间的圆弧 K_R^* 及 K_ρ^*(各为 K_R 及 K_ρ 的一部分)，还有 ζ_1 与 ζ_1' 以及 ζ_2 与 ζ_2' 之间的曲线 γ_1^* 及 γ_2^*(各为 γ_1 及 γ_2 的一部分)，合起来围成一区域 D_1.

在 K_R^* 及 K_ρ^* 上分别取区域 D_1 的可达点 ζ' 及 ζ''. 由附录二，这样的点必然存在；把它们用 D_1 内的一条简单连续曲线 γ(端点在 D_1 的边界上)联结起来．当一点从 ζ'' 出发，沿 γ 向 ζ 运动时，首先遇到 K_r 上的点 z^*；然后从 z^* 出发，沿 K_r 分别向两个方向运动，首先遇到 γ_1 及 γ_2 上的点 z_1^* 及 z_2^*，

由于折线 $\widetilde{w_1 w_n}$ 及 $\widetilde{w_2 w_n}$ 的距离 $\geqslant \varepsilon_0/2$，我们有

$$\varepsilon_0/2 \leqslant |f(z_2^*)-f(z_1^*)| = \left|\int_{z_1^*}^{z_2^*} f'(z)dz\right|$$

$$= \left|\int_{z_1^*}^{z_2^*} f'(\zeta+re^{i\theta})rie^{i\theta}d\theta\right| \leqslant \int_{z_1^*}^{z_2^*} |f'(\zeta+re^{i\theta})|rd\theta .$$

由希瓦尔兹不等式，

$$\varepsilon_0^2/4 \leqslant \int_{z_1^*}^{z_2^*} |f'(\zeta+re^{i\theta})|^2 r^2 d\theta ,$$

从而

$$\varepsilon_0^2/4r \leqslant \int_{z_1^*}^{z_2^*} |f'(\zeta+re^{i\theta})|^2 r d\theta.$$

取积分，

$$\frac{1}{4}\int_\rho^R \frac{\varepsilon_0^2}{r}dr = \int_\rho^R dr\int_{z_1^*}^{z_2^*} |f'(\zeta+re^{i\theta})|^2 r\, d\theta .$$

因此

$$\frac{1}{4}\varepsilon_0^2 \ln\frac{R}{\rho} \leqslant \iint_{D_1} |f'(z)|^2 dxdy = \iint_{D_1}\left|\frac{\partial(P,Q)}{\partial(x,y)}\right|dxdy,$$

其中

$$P(x,y)=\mathrm{Re}f(z),\ Q(x,y)=\mathrm{Im}f(z).$$

由于上列二重积分表示 D_1 在 $|w|<1$ 内的像的面积，我们有

$$\frac{1}{4}\varepsilon_0^2\ln\frac{R}{\rho}\leqslant\pi, \tag{9.3'}$$

与(9.3)相矛盾．因此 $f(z)$ 在 D 内一致连续．

应用引理 9.1 证明：

定理 9.1　设 z 平面上单连通区域 D 的边界是一条闭简单连续曲线 C．设单叶函数 $w=f(z)$ 把 D 映射成单位圆盘 $|w|<1$，那么这函数的定义可以唯一地推广到 C 上，使所得函数把闭区域 $\overline{D}=D\bigcup C$ 连续双射[1]成 $|w|\leqslant 1$．

证　由引理 9.1，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，只要 z' 及 $z''\in D$，并且 $|z'-z''|<\delta$，就有

$$|f(z')-f(z'')|<\varepsilon. \tag{9.4}$$

证明分下列几步进行：

(1) 把 $w=f(z)$ 的定义推广到 C 上．

设 $\zeta\in C$，$\{z_n\}\subset D$，$z_n\to\zeta\ (n\to+\infty)$．由柯西收敛原理，当 n 充分大，$p=1,2,\cdots$ 时，$|z_{n+p}-z_n|<\delta$．由(9.4)，这时

$$|f(z_{n+p})-f(z_n)|<\varepsilon.$$

因此序列 $\{f(z_n)\}$ 收敛于一有限复数 w．

设另一序列 $\{z_n'\}(\subset D)$ 收敛于 ζ．同理，序列 $\{f(z_n')\}$ 收敛于一有限复数 w'．我们有

$$|w-w'|\leqslant|w-f(z_n)|+|f(z_n')-w'|+|f(z_n)-f(z_n')|. \tag{9.5}$$

由于

---

[1] 连续函数所作的映射叫做连续映射．

$$|z_n - z_n'| \leqslant |z_n - \zeta| + |z_n' - \zeta|,$$

当 n 充分大时，$|z_n - z_n'| < \delta$. 由(9.4)，在(9.5)中适当选取 z_n 及 z_n时，我们有

$$|w - w'| < \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon .$$

因为 $\varepsilon > 0$ 是任意的，所以必然有 $|w - w'| = 0$，亦即 $w = w'$.与实变函数情形一样，由此可见，

$$\exists \lim_{z \to \zeta, z \in D} f(z) = w, \text{记作 } f(\zeta).$$

(2) 函数 $w = f(z)$在$\overline{D}$ 上连续.

只须证明 $f(\zeta)$在 C 上连续. 设 ζ 及 $\zeta^* \in C$，并且 $|\zeta - \zeta^*| < \dfrac{\delta}{3}$. 设$\{z_n\}$及$\{z_n^*\} \subset D$，$z_n \to \zeta$，$z_n^* \to \zeta^*(n \to +\infty)$，我们有

$$|f(\zeta) - f(\zeta^*)| \leqslant |f(\zeta) - f(z_n)| + |f(z_n^*) - f(\zeta^*)| + |f(z_n) - f(z_n^*)|. \tag{9.6}$$

由于

$$|z_n - z_n^*| \leqslant |z_n - \zeta| + |\zeta^* - z_n^*| + |\zeta - \zeta^*|,$$

适当选取 z_n 及 z_n^*，就有

$$|z_n - z_n^*| < \delta .$$

于是由引理 9.4，在(9.6)中适当选取 z_n 及 z_n^*，就可得到：当$|\zeta - \zeta^*| < \dfrac{\delta}{3}$ 时，

$$|f(\zeta) - f(\zeta^*)| < \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon .$$

因此$f(\zeta)$在 C 上连续，从而$f(z)$在$\overline{D}$ 上连续.

(3) 函数 $w = f(z)$给出从$\overline{D}$ 到$|w| \leqslant 1$的内射.

只须证明 $w=f(z)$ 给出从 C 到 $|w|=1$ 的内射．首先证明当 $\zeta\in C$ 时，$|f(\zeta)|=1$．设 $\{z_n\}\subset D$，$z_n\to\zeta(n\to\infty)$．假定 $w=f(\zeta)$ 满足 $|w|<1$．那么 $\exists z'\in D$，使得 $w=f(z')$．取 z' 的一个充分小的邻域 $V_{z'}$，当 n 充分大时，$z_n\overline{\in}V_{z'}$．因此当 n 充分大时，$f(z_n)\overline{\in}f(V_{z'})$，即 w 的一个邻域，从而不可能有 $f(z_n)\to w(n\to+\infty)$．于是 $|f(\zeta)|=1$．

其次证明当 ζ 及 $\zeta'\in C$，$\zeta\neq\zeta'$ 时，$f(\zeta)\neq f(\zeta')$．设 $\{z_n\}$ 及 $\{z_n'\}\subset D$，$z_n\to\zeta$，$z_n'\to\zeta'(n\to+\infty)$，我们就有 $|f(\zeta)|=|f(\zeta')|=1$．取 ζ 的一个充分小的邻域 V_ζ，使 $\zeta'\overline{\in}V_\zeta$，并且当 n 充分大时，$z_n\in V_\zeta$，$z_n'\overline{\in}V_\zeta$，从而 $f(z_n)\in f(V_\zeta)$，$f(z_n')\overline{\in}f(V_\zeta)$，因此不可能有 $f(z_n')\to f(\zeta)\in f(V_\zeta)$．于是 $f(\zeta)\neq f(\zeta')$．

不难看出，上述从 D 推广到 $\overline{D}$ 的函数 $w=f(z)$ 是唯一地确定的．

(4) 函数 $w=f(z)$ 给出从 $\overline{D}$ 到 $|w|\leqslant 1$ 的连续双射．

只须证明 $f(C)=\{w\,|\,|w|=1\}$．考虑 $w=f(z)$ 在 D 内的反函数 $z=g(w)$ 及其在 $|w|=1$ 上的推广，就可看出 $|w|=1$ 上每一点都是 C 上一点在映射 $w=f(z)$ 下的像．证完．

在保形映射的实际应用中，下述边界对应原理很重要，它在一定意义下是定理 9.1 的逆定理：

定理 9.2　设在 z 平面上的有界单连通区域 D 以闭简单分段光滑曲线 C 为边界．设函数 $w=f(z)$

(1) 在 D 及 C 所组成的闭区域 $\overline{D}$ 上解析；

(2) 把 C 双射成 $C_1:|w|=1$，

那么 $w=f(z)$ 把 D 保形双射成 $D_1:|w|<1$，并使 C 关于 D 的正向，对应于 C_1 关于 D_1 的正向．

证　这一定理可用上章系 5.1 证明．设 w_0 是 $f(z)$ 在 C 上所不取的一值．由上章系 5.1 并且由(1)及(2)，$f(z)-w_0$ 在 D 内的零点的个数是

$$N=\frac{1}{2\pi}\Delta_C \arg[f(z)-w_0]=\frac{1}{2\pi}\Delta_{C_1}\arg[w-w_0],$$

这里 Δ_C 的意义与上述系中相同，取 C_1 的方向使其在映射下与 C 关于 D 的正向相对应．

显然，按照所取 C_1 方向是逆时针还是顺时针的，我们有

$$\Delta_{C_1}\arg[w-w_0]=\begin{cases}\pm 2\pi & (|w_0|<1),\\ 0 & (|w_0|>1),\end{cases}$$

于是

$$N=\begin{cases}\pm 1 & (|w_0|<1),\\ 0 & (|w_0|>1).\end{cases}$$

但 $N=-1$ 是不可能的．因此在 $w=f(z)$ 下，C_1 的逆时针方向、亦即关于 D_1 的正向，与 C 关于 D 的正向相对应．这样，在 D 内，$f(z)$ 取圆盘 $|w|<1$ 内的任何值一次，而不取 $|w|>1$ 内的任何值．从而 $f(D)$ 内包含 D_1，而不含 $|w|>1$ 内的任何值．

现证明 $D_1=f(D)$．这时 $f(z)$ 在 D 内不恒等于常数．由定理 1.3 知，$f(D)$ 是一区域．假定有一点 $w_1\in f(D)$ $(|w_1|=1)$，那么 $f(D)$ 应含 w_1 的一个邻域，从而应含 $|w|>1$ 内的一些点．这是不可能的．因此 $f(D)=D_1$．

因为利用简单分式线性函数可以把无界区域变成为有界区域，所以对于无界区域，上面的定理仍然成立．

我们知道对扩充 z 平面及 w 平面上分别不同的三点 α,β,γ 及 $\alpha_1,\beta_1,\gamma_1$，有一个并且只有一个分式线性函数把 α,β,γ 分别映射成 $\alpha_1,\beta_1,\gamma_1$，而且把过 α,β,γ 的圆或直线 C 映射成过 $\alpha_1,\beta_1,\gamma_1$ 的圆或直线 C_1．C 及 C_1 分别把扩充 z 平面及 w 平面分成两个区域；这一线性函数确定了这些区域之间的保形双射．由定理 9.2，如果 α,β,γ 在 C 上排列的次序关于区域 D

为正向，而 $\alpha_1,\beta_1,\gamma_1$ 在 C_1 上排列的次序关于区域 D_1 为正向，那么上述函数把区域 D 保形双射成 D_1．

10．实例 在解决某些实际问题以及数学理论问题时，我们往往要把有关解析函数的定义区域保形映射成为较简单的区域，以便进行研究及计算．作为实例，我们现在用几个初等函数相结合，把一些简单区域保形映射成半平面、圆盘或其他简单区域．

例1 求作一单叶函数，把半圆盘 $|z|<1$，$\operatorname{Im} z>0$ 保形映射成上半平面．

因为圆 $|z|=1$ 及实数轴 $\operatorname{Im} z=0$ 在 -1 及 $+1$ 直交，所以作分式线性函数

$$\omega=\frac{z+1}{z-1},\tag{10.1}$$

把 -1 及 $+1$ 分别映射成 ω 平面上 O 及 ∞ 两点，于是把 $|z|=1$ 及 $\operatorname{Im} z=0$ 映射成 ω 平面上在原点互相直交的两条直线．

由于线性函数(10.1)中的常数是实的，z 平面上的实轴映射成为 ω 平面上的实轴；又由于 $z=0$ 映射成为 $\omega=-1$，半圆的直径 AC 映射成为 ω 平面上的负半实轴．

显然圆 $|z|=1$ 映射成为 ω 平面上的虚轴．又由于 $z=i$ 映射成为 $\omega=\dfrac{i+1}{i-1}=-i$，半圆 ADC 映射成为下半虚轴(图 37)．

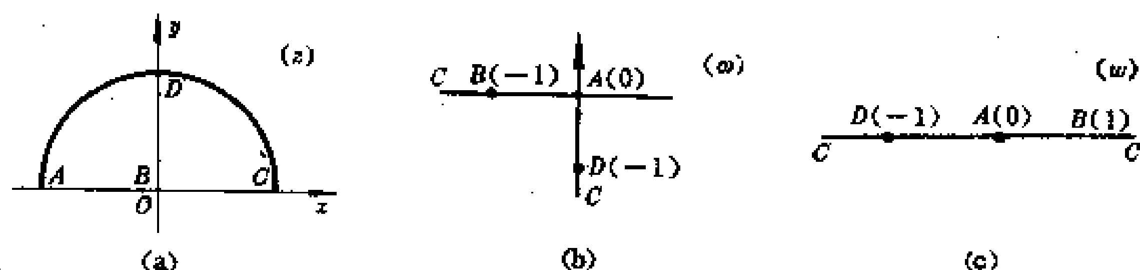


图 37

根据在保形映射下区域及其边界之间的对应关系，已给半圆

盘所映射到 ω 平面上的区域，应当在周界 ABC 的左方，因此它是第三象限 $\pi<\arg\omega<\dfrac{3\pi}{2}$.

最后作映射

$$w=\omega^2. \tag{10.2}$$

当 ω 在第三象限中变化时，$\arg\omega$ 在 2π 及 3π 之间变化．因此 ω 平面上的第三象限就映照成为 w 平面上的上半平面．

结合(10.1)及(10.2)，我们得到所求的一个单叶函数：

$$w=\omega^2=\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2. \tag{10.3}$$

我们也可作出其他单叶函数实现所要求的保形映射．

例 2 求作一单叶函数，把 z 平面上的带形 $0<\operatorname{Im}z<\pi$ 保形映射成 w 平面上的单位圆盘 $|w|<1$.

函数

$$\omega=e^z \tag{10.4}$$

把 z 平面上的已给带形保形映射成 ω 平面上的上半平面(见图 6).

取 ω 平面上关于实轴的对称点 $-i$ 及 i .那么函数

$$w=\frac{\omega-i}{\omega+i} \tag{10.5}$$

把 ω 平面上的上半平面保形映射成为 $|w|<1$ (图 38)．

结合 (10.4)及 (10.5)就得到所求单叶函数：

$$w=\frac{e^z-i}{e^z+i}.$$

例 3 求作一单叶解析函数，把扩充 z 平面上单位圆的外部 $|z|>1$ 映射成扩充 w 平面上去掉割线 $-1\leqslant\operatorname{Re}w\leqslant1$, $\operatorname{Im}w=0$ 而得的部分 (图 39)．

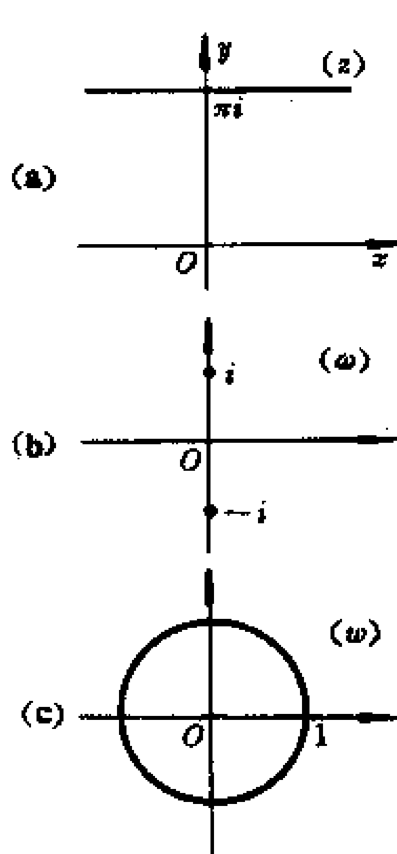


图 38

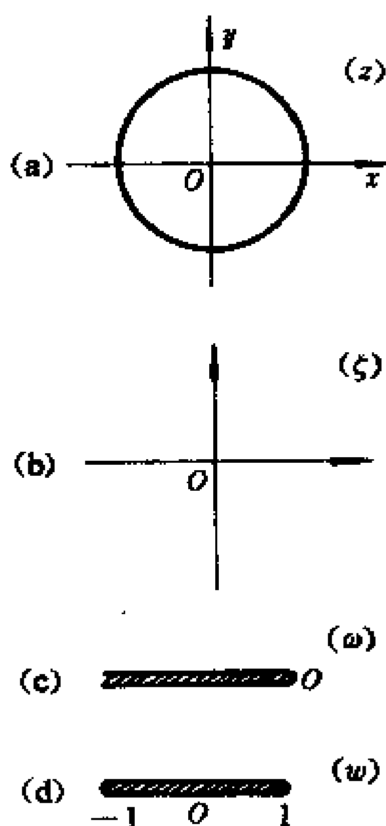


图 39

容易验证，分式线性函数

$$\omega=\frac{w+1}{w-1} \tag{10.6}$$

把割线 $-1\leqslant \operatorname{Re} w\leqslant 1$，$\operatorname{Im} w=0$ 映射成 ω 平面上的负实轴，把扩充w 平面上的已给部分保形映射成 ω 平面上除去负实轴(包括0)而得的部分(图 39).

另一方面，分式线性函数

$$\zeta=\frac{z+1}{z-1} \tag{10.7}$$

把圆 $|z|=1$ 映射为 ζ 平面的虚轴．由于它把 $z=2$ 映射成为 $\zeta=3$，可见它把扩充 z 平面上单位圆的外部 $|z|>1$ 映射成 ζ 平面的右半平面．显然，

$$\omega=\zeta^2 \tag{10.8}$$

把 ζ 平面上的这一部分映射成 ω 平面上除去负实轴而得的区域.

结合(10.6)—(10.8),可见由等式

$$\frac{w+1}{w-1}=\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2$$

所确定的函数

$$w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right), \tag{10.9}$$

就是所求的单叶函数.

函数

$$Z=\frac{1}{z}$$

把区域 $|z|>1$ 保形映射成为 $|Z|<1$,把函数(10.9)变换为

$$w=\frac{1}{2}\left(Z+\frac{1}{Z}\right).$$

由此可见,函数(10.9)把圆盘 $|Z|<1$ 也保形映射成为例 3 中所给出扩充 w 平面上的区域.

例 4 求作一单叶函数,把半带域 $-\pi/2<x<\pi/2, y>0$ 保形双射成上半平面,并且使 $f(\pm\pi/2)=\pm 1, f(0)=0$.

把坐标系按反时针方向转一直角,并且应用指数函数作映射.我们求得函数

$$\omega=e^{iz} \tag{10.10}$$

把上述半带形域映射成 ω 平面上的半圆盘 $|\omega|<1$, $\mathrm{Re}\,\omega>0$(图 40(b)).

把坐标系按反时针方向转一直角,并且应用(10.3),就得到

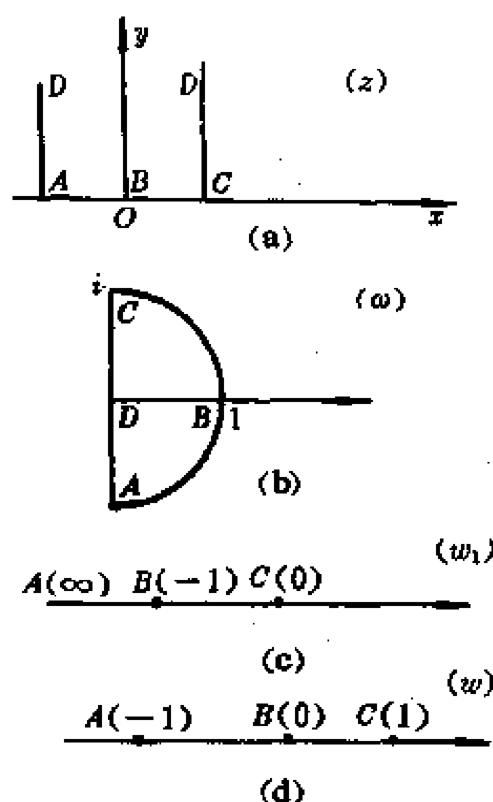


图 40

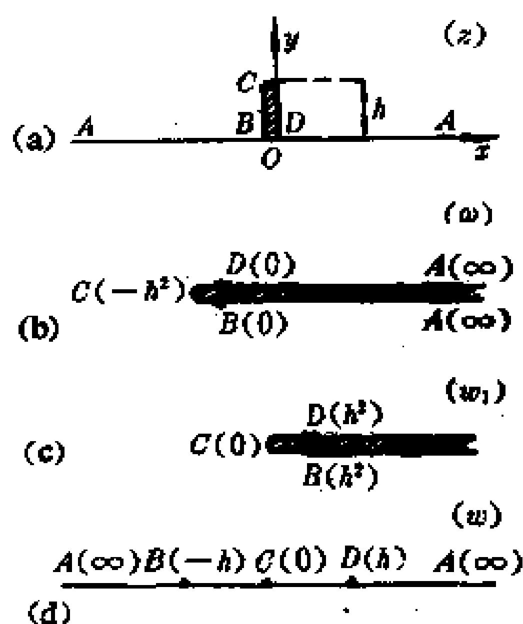


图 41

$$w_1=\left(\frac{i\omega+1}{i\omega-1}\right)^2. \tag{10.11}$$

结合(10.10)及(10.11)，我们得到把已给半带域保形映射到上半 w_1 平面的单叶函数，不过这时 $z=-\pi/2$，0 及 $\pi/2$ 分别映射成 $w_1=\infty$，-1 及 0．作线性函数，把 $w_1=\infty$，-1 及 0 映射成 $w=-1$，0 及 $+1$：

$$w=-\frac{w_1+1}{w_1-1}. \tag{10.12}$$

最后由(10.12)，(10.11)及(10.10)，就得到所求的单叶函数：

$$w=-\frac{(i\omega+1)^2+(i\omega-1)^2}{(i\omega+1)^2-(i\omega-1)^2}=\frac{\omega^2-1}{2i\omega}$$

$$= \frac{1}{2i}(e^{iz}-e^{-iz})=\sin z.$$

例 5 在z平面的上半平面上，从原点起，沿虚轴作一长为h的割线（图 41 (a)）．试作一个单叶解析函数，把在上述半平面去掉割线而得的区域保形映射成w平面的上半平面．

首先作映射把割线除掉，使已给区域的全部边界都变到ω平面的实轴上．为此，用在上述区域内的单叶解析函数

$$\omega = z^2$$

把z平面的第一及第二象限分别映射成为ω平面的上半平面及下半平面．这时射线AD映射成ω平面上正实轴的上沿，DC映射成从 0 到$-h^2$的线段的上沿，CB映射成这线段的下沿，BA映射成正实轴的下沿，于是z平面上的已给区域映射成为ω平面上除去射线$\mathrm{Im}\,\omega=0$，$\mathrm{Re}\,\omega\geqslant -h^2$而得的区域．

显然，函数

$$w_1=\omega+h^2$$

把ω平面的上述区域映射成w_1平面上除去正实轴而得的区域；而函数

$$w=\sqrt{w_1}$$

又把这一区域映射成w平面的上半平面，在这里$\sqrt{w_1}$应理解为在正实轴的上沿取正值的一个解析分枝．

结合以上结果，就得到所求的函数

$$w=\sqrt{w_1}=\sqrt{\omega+h^2}=\sqrt{z^2+h^2}. \qquad (10.13)$$

习 题 六

1．如果单叶解析函数$w=f(z)$把z平面上可求面积的区域D映射成w平面上的区域D^*，证明D^*的面积是

$$A=\iint_D |f'(z)|^2\,dxdy.$$

2．如果函数$f(z)$在可求面积的区域D内单叶解析，并且满足条件$|f(z)|\leqslant 1$，证明

$$\iint |f'(z)|^2 dx\,dy \leqslant \pi .$$

3．如果函数$f(z)$在$z=0$解析，并且$f'(0)\neq 0$，证明$f(z)$在$z=0$的一个邻域内单叶．

[提示] 考虑$f(z)$在$z=0$的泰勒展式．

4．如果$f(z)$在区域D内解析，且没有零点，证明$|f(z)|$不可能在D内达到最小值．

5．设$f(z)$在$|z|\leqslant a$上解析，在圆$|z|=a$上有$|f(z)|>m$，并且

$$|f(0)|<m .$$

其中a及m是有限正数，证明$f(z)$在$|z|<a$内至少有一零点．

[提示] 应用上题．

6．设在$|z|<1$内，$f(z)$解析，并且$|f(z)|<1$；但$f(\alpha)=0$，其中$|\alpha|<1$．证明：在$|z|<1$内，有不等式

$$|f(z)|\leqslant\left|\frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}\right|$$

7．应用希瓦尔兹引理，证明：把$|z|<1$变为$|w|<1$，且把α变为0的保形双射一定有下列形状

$$w=e^{i\theta}\frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z},$$

这里θ是实常数，α是满足$|\alpha|<1$的复常数．

8．试作保形映射：

(1)把带形区域$\pi<y<2\pi$映射成上半平面；

(2)把去掉上半虚轴的复平面映射成上半平面．

9．函数$w=z^2$及$z=\sqrt{w}$分别把$x=C_1$，$y=C_2$及$u=C_3$，$v=C_4$映射成z平面及w平面上的什么曲线？这里u及v是w的实部及虚部，C_1，C_2，C_3及C_4是实常数．

10．试作保形映射：

(1)把双曲线 $x^2-y^2=1$ 两枝之间的区域映射成上半平面；

(2)把抛物线 $v^2=4(u+1)$ 左方的区域映射成上半平面.

[提示] 利用上题的结果.

11. 试把圆盘 $|z|<1$ 保形映射成半平面 $\operatorname{Im} w>0$，并且将点 $-1,1,i$ 映射成 (1) $\infty,0,1$；或 (2) $-1,0,1$.

12. 试把 $\operatorname{Im} z>0$ 保形映射成 $\operatorname{Im} w>0$，并且把点 (1) $-1,0,1$；或 (2) $\infty,0,1$ 映射成 $0,1,\infty$.

13. 试作一单叶解析函数 $w=f(z)$，把 $|z|<1$ 映射成 $|w|<1$，并且使 $f(0)=\dfrac{1}{2}$，$f'(0)>0$.

14. 根据第一章，习题一第 12 题，证明 z_1 及 z_2 是关于圆 $\left|\dfrac{z-z_1}{z-z_2}\right|=k$ $(0<k\neq 0)$ 的对称点.

15. 在圆盘 $|z|<1$ 中除去实轴上的半闭区间 $\left[\dfrac{1}{2},1\right)$，得一区域. 试把这一区域保形映射成圆盘 $|w|<1$.

16. 试作保形映射：

(1)把 $|z|<1$ 及 $|z-1|<1$ 的公共部分映射成 $|w|<1$；

(2)把扇形 $0<\arg z<a\,(<2\pi)$，$|z|<1$ 映射成 $|w|<1$；

(4)把圆 $|z|=2$ 及 $|z-1|=1$ 所夹的区域映射成 $|w|<1$；

(5)把圆 $|z|<1$ 映射成带形 $0<v<1$，并把 $-1,1,i$ 映射成 ∞,∞,i.

17. 设

$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

是一个 ρ 级整函数，这就是说，

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}}\ \frac{\overset{+}{\ln}\overset{+}{\ln} M(r)}{\ln r}=\rho,$$

其中

$$M(r)=\max_{|z|=r}\{|f(z)|\}\quad(0\leqslant r<+\infty),$$

$$\overset{+}{\ln} x=\begin{cases}\ln x & (x\geqslant 1),\\ 0 & (0<x<1).\end{cases}$$

(1)证明 $M(r)$是增函数.

(2)设$p>0$ 及 $t>1$都是有限数,证明

$$\varphi(r)=\exp(r^p)/r^t\ (r>0)$$

在 $r=(t/p)^{1/p}$ 时达到最小值 $\exp\left(\frac{t}{p}(1+\ln p-\ln t)\right)$.由此及柯西不等式(第三章,§2)导出:如果 $\rho\in(0,+\infty)$,那么

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\frac{\ln|a_n|}{n\ln n}\leqslant-\frac{1}{\rho}.$$

(3)设p及r都是正有限数,证明

$$\psi(t)=r^t t^{-t/p}$$

在 $t=r^p/e$ 时达到最大值 $\exp(r^p/ep)$.由此导出:如果 $\rho_1\in(0,+\infty)$,并且

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\frac{\ln|a_n|}{n\ln n}<-\frac{1}{\rho_1},$$

那么整函数 $f(z)$的级小于 ρ_1.

(4)由(2)及(3)导出:如果 $\rho\in(0,+\infty)$,那么整函数 $f(z)$的级是

$$\rho\Longleftrightarrow\overline{\lim_{n\to+\infty}}\frac{\ln|a_n|}{n\ln n}=-\frac{1}{\rho}.$$

18. 设幂级数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n z^n$$

的收敛半径是1,那么$f(z)$是单位圆盘内的一个解析函数,并且它在$|z|<1$内的级的定义是

$$\overline{\lim_{r\to1-0}}\frac{\overset{+}{\ln}\overset{+}{\ln}M(r)}{\ln\frac{1}{1-r}}=\rho.$$

其中

$$M(r)=\max\{|f(z)|\}\ (0\leqslant r<1).$$

(1) 令 $r=e^{-\sigma}(\sigma>0)$，证明

$$\overline{\lim_{\sigma\to+0}}\frac{\overset{+}{\ln}\overset{+}{\ln}M(e^{-\sigma})}{\ln(1/\sigma)}=\rho.$$

(2) 设 t 及 p 是有限正数，证明

$$\varphi(\sigma)=\exp(\sigma^{-p})e^{t\sigma}\ (\sigma>0)$$

在 $\sigma=(p/t)^{1/(p+1)}$ 时达到最小值 $\exp((p+1)(t/p)^{p/(p+1)})$. 由此导出：如果 $\rho\in(0,+\infty)$，那么

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\frac{\overset{+}{\ln}\overset{+}{\ln}|a_n|}{\ln n}\leqslant\frac{\rho}{\rho+1}.$$

(3) 设 σ 及 p 是有限正数，而且 $0<p<1$，证明

$$\psi(t)=\exp(t^{p})e^{-\sigma t}\ (t\geqslant 0)$$

在 $t=(p/\sigma)^{1/(1-p)}$ 时达到最大值 $\exp((1-p)(p/\sigma)^{p/(1-p)})$. 由此导出：如果 $\rho_1\in(0,+\infty)$，并且

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\frac{\overset{+}{\ln}\overset{+}{\ln}|a_n|}{n\ln n}<\frac{\rho_1}{\rho_1+1},$$

那么 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 内的级小于 ρ_1.

(4) 由 (2) 及 (3) 导出：如果 $\rho\in(0,+\infty)$，那么解析函数 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 内的级是

$$\rho\Longleftrightarrow\overline{\lim_{n\to+\infty}}\frac{\overset{+}{\ln}\overset{+}{\ln}|a_n|}{n\ln n}=\frac{\rho}{\rho+1}.$$

*19. 设 $\{f_n(z)\}$ 是在区域 D 内的解析函数序列 $(n=1,2,\cdots)$. 设这序列在 D 内内闭一致有界，并且在 D 内有聚点的集 E 上收敛，试证明这序列在 D 内内闭一致收敛.

这就是维塔利定理.

*20. 设 $\{D_n\}$ 是 z 平面上不同的单连通区域序列，而且 $0\in D_1\subset D_2\subset\cdots\subset D_n\subset\cdots$,

(1) 证明 $D=\bigcup_{n=1}^{+\infty} D_n$ 是一单连通区域.

(2) 设 $w=f_n(z)$ 满足 $f_n(0)=0$, $f_n'(0)>0$, 并且是把 D_n 映射成 $|w|<1$ 的唯一的保形映射 $(n=1,2,\cdots)$. 设 R_n 是 D_n 内所含以 0 为心的最大圆盘的半径. 对 $w=f_n(z)$ 的反函数应用希瓦尔兹引理, 证明

$$|f_n(z)|\geqslant R_n|z|,\ f_n'(0)\geqslant R_n.$$

(3) 由 (2) 证明: $D=\mathbb{C} \Longleftrightarrow \{f_n'(0)\}$ 无界.

(4) 证明当 $D=\{z\mid |z|<1\}$ 时, $\{f_n(z)\}$ 在 D 内内闭一致收敛于 z.

(5) 证明当 $D\neq\mathbb{C}$ 时, $\{f_n(z)\}$ 在 D 内内闭一致收敛.

(6) 证明当 $D=\mathbb{C}$ 时, $\{f_n(z)\}$ 在 $D-\{0\}$ 内内闭一致趋近于 ∞.

*21. 设区域 D 内的解析函数族在 D 内不是正规的, 证明 $\exists z_0\in D$, 使得它在 z_0 的任何邻域内不是正规的.

第七章 解析开拓

§1. 解析开拓概念

1. 对称原理 在第二章中，我们已经把一些实变函数如 e^x，$\sin x$ 等，推广成为复平面上的解析函数．本章我们将阐明把在已知区域内的解析函数推广到更大区域的问题，也就是解析开拓的问题．本节讲述这方面的一个重要结果，即对称原理．它可以用来推广某些解析函数的定义区域，使我们便于研究这些函数；还可用它来解决保形映射的一些问题．

设实变数实值函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 有泰勒展式

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(x-x_0)^n\ ,$$

它的收敛半径是 $r>0$，其中 a_n 是实数．那么 $f(x)$ 可推广成在圆盘 $|z-x_0|<r$ 内解析的函数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\alpha_n(z-x_0)^n\ \text{①}.$$

显然

$$\overline{f(z)}=\overline{\sum_{n=0}^{+\infty}\alpha_n(z-x_0)^n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\alpha_n(\bar{z}-x_0)^n=f(\bar{z}),$$

亦即

① 例如 e^x，$\sin x$ 等可以象这样推广成 e^z，$\sin z$ 等．根据解析函数的唯一性，这样得到的推广与第二章中得到的完全一致．

$$f(z)=\overline{f(\overline{z})}.$$

这就是说，$f(z)$在对称点 z 及$\overline{z}$ 处的值相互共轭．这一事实启发我们引出对称原理：

定理 1.1　设D 是在实轴某一边的区域，其边界是一分段光滑简单闭曲线，其中有一段是实轴上的一个区间 I(不包含两端点)．设函数 $f(z)$在 D 内及 I 上所有点组成的集上连续[①]，在 D 内解析，而且在 I 上取实数值．考虑与区域 D 关于实轴为对称的区域 D^*，并且把函数$f(z)$的定义扩充到 D^*：

$$f(z)=\overline{f(\overline{z})}\quad(z\in D^*),$$

那么$f(z)$在 D^* 内及 I 上都是解析的．

证　首先证明$f(z)$在 D^* 内解析．设 z_0 及 $z\in D^*$，那么$\overline{z}_0$ 及$\overline{z}\in D$．我们有

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\frac{\overline{f(\overline{z})}-\overline{f(\overline{z}_0)}}{z-z_0}$$

$$=\overline{\left[\frac{f(\overline{z})-f(\overline{z}_0)}{\overline{z}-\overline{z}_0}\right]}.$$

因此

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\lim_{z\to z_0}\overline{\left[\frac{f(\overline{z})-f(\overline{z}_0)}{\overline{z}-\overline{z}_0}\right]}=\overline{f'(\overline{z}_0)},$$

亦即存在着$f'(z_0)=\overline{f'(\overline{z}_0)}$．由于 z_0 是 D^* 内任一点，这样就证明了$f(z)$在 D^* 内解析．

其次证明，$f(z)$ 在 D^* 内及 I 上所有点组成的集上连续．设

---

① 函数在这种集（不是闭区域）上连续与函数在闭区域上连续的定义相似，参看第二章第 1 段．

$z \in D^*$，$a \in I$，我们有$\bar{z} \in D$．用 x, y 及 $u(x,y), v(x,y)$分别表示 z 及$f(z)$的实部和虚部．由于$f(z)$在 I 上取实数值，

$$\lim_{\bar{z} \to a} f(\bar{z}) = \lim_{\bar{z} \to a} [u(x,-y) + iv(x,-y)] = f(a) = u(a,0).$$

因此存在着

$$\lim_{z \to a} f(z) = \lim_{\bar{z} \to a} \overline{f(\bar{z})} = \lim_{\bar{z} \to a} [u(x,-y) - iv(x,-y)]$$

$$= u(a,0) = f(a).$$

由所设及已证明的结果，可见 $f(z)$在 D，D^* 及 I 中所有点组成的区域 G 内连续．

最后我们应用莫勒拉定理来证明$f(z)$在区域 D 内解析．由第三章，第 5 段这定理后面的说明，在定理中所述“任一条简单闭曲线 C”可换成“任一三角形的周界 C”．在 G 内任作一三角形的周界 C．如果 C 完全在 D 内或 D^* 内，那么由于$f(z)$在 D 内及 D^* 内解析，我们有

$$\int_C f(z)\,dz = 0. \quad (1.1)$$

如果 C 与实轴相交于两点 A_1 及 B_1，那么作与实轴平行，距离为 $\varepsilon > 0$，并且关于实轴为对称的两直线，使其与 C 分别地相交于 A，B 及 A^*，B^*（图 42），我们显然有

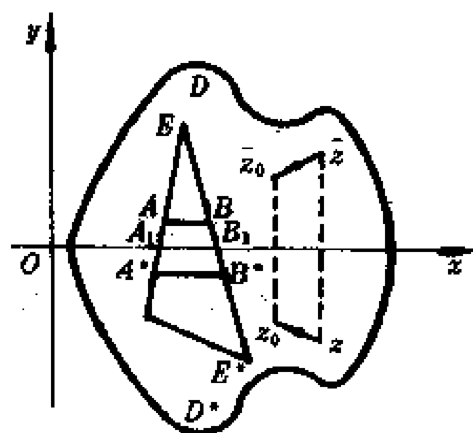


图 42

$$\int_{ABEA} f(z)dz = \int_{A^*E^*B^*A^*} f(z)dz = 0. \qquad (1.2)$$

在 (1.2)中令 ε 趋近于零，就得到

$$\int_{A_1 B_1 E A_1} f(z)dz = \int_{A_1 E^* B_1 A_1} f(z)dz = 0. \qquad (1.3)$$

把(1.3)中两积分相加就得到(1.1). 如果 C 在 D 内其他位置仍可得到同样的结果. 这样我们就证明了 $f(z)$ 在 G 内解析.

由 $f(z)$ 在 D^* 中的定义可看出,函数 $w=f(z)$ 把在 z 平面上关于实轴为对称的区域 D 及 D^* 映射成在 w 平面上关于实轴为对称的集 $D_1=f(D)$ 及 $D_1^*=f(D^*)$,并且 $I_1=f(I)$ 是 w 平面的实轴上一个集.

因为经过平移与旋转后,关于某一直线的对称点变成关于变换而得直线的对称点,所以我们可以把对称原理推广如下:

设 D 是在 z 平面上位于直线 L 某一边的区域,其边界是一分段光滑简单闭曲线,其中有一段是 L 上一个区间 I(不包含端点). 设函数 $w=f(z)$ 在 D 内及 I 上所有点组成的集上连续,在 D 内解析,而且 $I_1=f(I)$ 在 w 平面的某一直线 L_1 上. 考虑与区域 D 关于 L 为对称的区域 D^*,并且把函数 $w=f(z)$ 的定义扩充到 D^*: 如果 $z^*\in D^*, z\in D$, 并且 z 及 z^* 是关于 L 的对称点,那么 $f(z^*)$ 及 $f(z)$ 是关于 L_1 的对称点. 在这些条件下,$w=f(z)$ 在 D^* 内及 I 上都是解析的.

如果在上述结果中,L 及 L_1 是圆,那么应用分式线性函数把它们映射成为直线. 我们知道(第六章定理 4.4),在这样的映射下,关于圆的一对对称点变成关于直线的一对对称点. 因此对称原理还可进一步加以推广. 请读者自己补充叙述和证明.

我们举例说明对称原理的应用.

例 1 设函数 $w=f(z)$ 在上半 z 平面及实轴上单叶解析,并且把上半 z 平面保形映射成上半 w 平面,把 z 平面上的实轴映射成为 w 平面上的实轴,那么 $f(z)$ 是一线性函数 $\alpha_0+\alpha_1 z$.

由对称原理,我们可以把 $w=f(z)$ 的定义区域越过 z 平面的实轴扩充到下半平面,得到在整个 z 平面上的单叶解析函数 $w=$

$f(z)$，它是一个整函数，并把 z 平面保形映射成 w 平面．

现证明 ∞ 不是 $f(z)$ 的本性奇点．否则由第四章第 8 段中所提到的外尔斯特拉斯定理，对任何有限复数 α，可找到序列 $\{z_n\}$，使得 $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n=\infty$，$\lim\limits_{n\to+\infty} f(z_n)=\alpha$．另一方面，由假设，可找到有限复数 α，使 $f(a)=\alpha$．又由第六章定理 1.4，$w=\alpha$ 的任一邻域 $V_1: |w-\alpha|<\varepsilon(\varepsilon>0)$，是由含 $z=\alpha$ 的一个有界区域 V 映射而得．显然我们可找到正整数 n_0，使得 z_{n_0} 不属于 V，并且 $|f(z_{n_0})-\alpha|<\varepsilon$．但这时在 V 内可找到 z_0，使 $f(z_0)=f(z_{n_0})$，这与 $f(z)$ 的单叶性相矛盾．因此 $f(z)$ 是一多项式

$$f(z)=\alpha_0+\alpha_1 z+\alpha_2 z^2+\cdots+\alpha_n z^n\ (\alpha_n\neq 0).$$

如果 $n=0$，那么 $f(z)$ 不是 z 平面上的单叶解析函数．如果 $n>1$，那么 $f'(z)$ 在某些点为零；由第六章引理 1.1，$f(z)$ 也不可能是在 z 平面上的单叶解析函数．因此 $n=1$，而 $f(z)=\alpha_0+\alpha_1 z\ (\alpha_1\neq 0)$．

在作某些对称形状的区域的保形映射时，可以应用对称原理，现举例如下：

例 2 在 z 平面实轴上取从 -1 到 $+1$ 的线段以及从原点 O 出发的下半虚轴作为割线，得一区域．作一单叶解析函数，把这区域保形映射成为 w 平面的上半平面．

先取上半虚轴作为补助割线（图 43 上的虚线），并把所得区域 $ABCDA$（以 0 到 1 的线段作为割线的右半 z 平面）映射成为半平面．仿照第六章第 8 段的例 5，下列函数可以作出这一映射：

$$\zeta=z^2,\ \omega=\sqrt{\zeta-1}=\sqrt{z^2-1},$$

亦即 $\omega=\sqrt{z^2-1}$ 把上述区域映射成 ω 平面的右半平面．这时补助割线映射成为 ω 平面上从 i 沿上半虚轴到 ∞ 的射线．根据对称原理，$\omega=\sqrt{z^2-1}$ 把左半 z 平面上以 -1 到 0 的线段作割线

而得的区域，映射成为的左半ω平面. 因此函数 $\omega=\sqrt{z^2-1}$ 把 z 平面上的已给区域，映射成为ω 平面上除去从 i 出发沿虚轴向下的射线而得的区域.

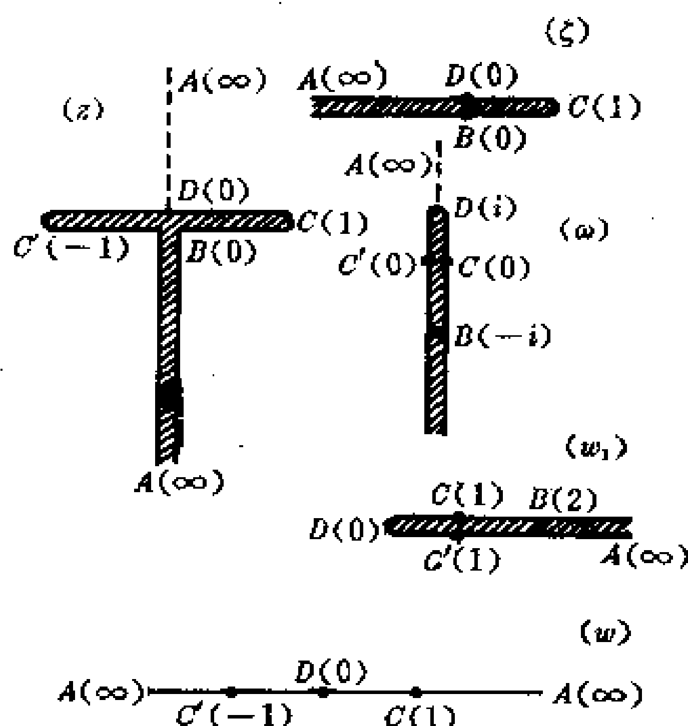


图 4

作平移及旋转，把ω平面上的这一区域映射成为 w_1 平面上以正实轴为割线而得的区域：

$$w_1=i(\omega-i)=i\omega+1 .$$

最后，函数 $w=\sqrt{w_1}$ 把 w_1 平面上以正实轴为割线而得的区域映射成为上半 w 平面.

结合上面的结果，就得到所求的函数：

$$w=\sqrt{i\omega+1}=\sqrt{i\sqrt{z^2-1}+1} .$$

请读者自己指出对于本例中各有关多值函数，应取哪一些解

析分枝．

2．用幂级数的解析开拓・ 奇点 在上一段中，我们研究了一类特殊解析函数的解析开拓．由第四章定理 4.2，函数在一点解析的必要与充分条件是：它在这点的某一邻域内有幂级数展式．因此，为了研究任何解析函数在一点附近的解析开拓，很自然地要研究它的幂级数展式是否可以解析开拓．

设在一点 z_1 解析的函数的幂级数展式是

$$f_1(z)=\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n^{(1)}(z-z_1)^n, \tag{2.1}$$

并设其收敛圆盘为 $D_1:|z-z_1|<r_1(0<r_1<+\infty)$．在 D_1 内任取一点 $z_2(\neq z_1)$，$f_1(z)$在这点的幂级数展式是

$$f_2(z)=\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n^{(2)}(z-z_2)^n, \tag{2.2}$$

其中

$$\alpha_0^{(2)}=f_1(z_2),\ \alpha_n^{(2)}=\frac{f_1^{(n)}(z_2)}{n!}\quad(n=1,2,3,\cdots).$$

显然，z_2 与 D_1 的边界上任一点的距离不小于 $r_1-|z_1-z_2|$．于是在圆盘 $|z-z_2|<r_1-|z_1-z_2|$ 内，$f_1(z)$解析，并且$f_1(z)=f_2(z)$．由此可见，级数(2.2)的收敛半径 $r_2\geqslant r_1-|z_1-z_2|$．

如果 $r_2>r_1-|z_1-z_2|$，那么(2.2)确定一个在 D_2 内解析的函数 $f_2(z)$，而且 D_2 有一部分在 D_1 外(图 44(a))．由解析函数的唯一性(第四章定理 6.2)，在 D_1 及 D_2 的公有部分，$f_1(z)=f_2(z)$．这时我们说$f_1(z)$可从过 z_2 的半径方向上解析开拓到 D_1 外．

如果 $r_2=r_1-|z_1-z_2|$，那么 D_2 包含在 D_1 内(图 44(b))．这时我们说$f_1(z)$不能从过 z_2 的半径方向上开拓到 D_1 外，而把

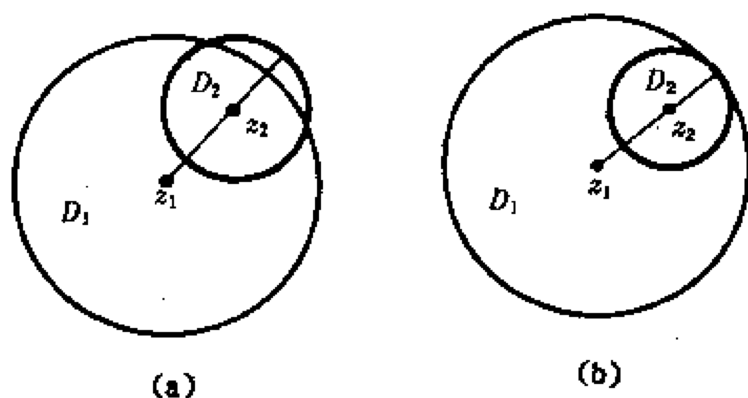


图 44

D_1 与 D_2 的边界的切点称为奇点．以前讲过的极点、孤立本性奇点以及枝点，按照这里的定义都是奇点；下面将通过例子作一些说明．

例 1 我们知道

$$f_1(z)=\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$$

在圆盘 $D_1: |z|<1$ 内解析．现求 $f_1(z)$在 $z=-\frac{i}{2}$ 的幂级数展式．我们有

$$f_1\left(-\frac{i}{2}\right)=\frac{2}{5}(2-i),$$

$$f_1^{(n)}\left(-\frac{i}{2}\right)=n!\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}(2-i)^{n+1}\ (n=1,2,3,\cdots).$$

所求展式是

$$f_2(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left[\frac{2}{5}(2-i)\right]^{n+1}\left(z+\frac{i}{2}\right)^n,$$

可求出其收敛半径为 $\frac{\sqrt{5}}{2}$（图 45）. 因此 $f_2(z)$ 在圆盘 D_2: $\left|z+\frac{i}{2}\right|<\frac{\sqrt{5}}{2}$ 内解析. D_2 有一部分在 D_1 外，而在 D_1 与 D_2 的公有部分内，$f_1(z)=f_2(z)$. 因此 $f_1(z)$ 可从过 $-\frac{i}{2}$ 的半径方向上开拓到 D_1 外.

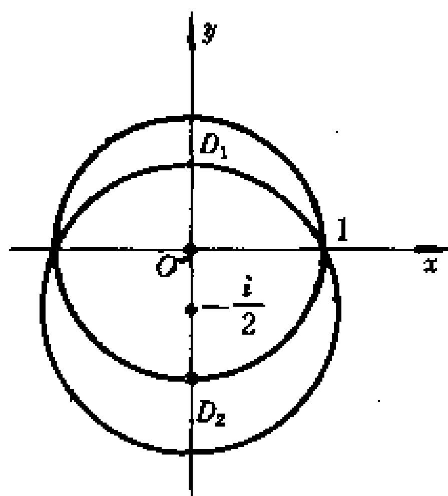


图 45

在本例中，由于已知 $f_1(z)=\frac{1}{1-z}$，事实上，这时不必用幂级数进行解析开拓.

例 2 例1 中函数 $f_1(z)$ 在 $z=a\,(0<a<1)$ 的幂级数展式是

$$f_2(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(1-a)^{-n-1}(z-a)^n,$$

可求得其收敛半径为 $1-a=1-|a-0|$. 因此 $z=1$ 是 $f_1(z)$ 的奇点；它是一阶极点.

例 3 由第四章第4段例 2，$\ln(1+z)(\ln 1=0)$ 在 $z=0$ 的幂级数展式是

$$f_1(z)=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n}+\cdots,$$

其收敛半径为 1 . $f_1(z)$ 在 $z=\frac{-1}{2}$ 的幂级数展式是

$$f_2(z)=-\ln 2+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^n}{n}\left(z+\frac{1}{2}\right)^n,$$

可求得其收敛半径为 $\frac{1}{2}=1-\left|-\frac{1}{2}-0\right|$. 因此 $z=-1$ 是 $f_2(z)$的奇点；而这一点是 $\text{Ln}(1+z)$的枝点.

关于一般幂级数所确定的函数,有下列定理：

定理 2.1 设幂级数(2.1)的收敛半径 r_1 满足 $0<r_1<+\infty$，那么在 $|z-z_1|=r_1$ 上至少有 $f_1(z)$的一个奇点.

证 假定 $|z-z_1|=r_1$ 上每一点都不是奇点,那么对于它上面每一点 γ，有在 $|z-z_1|<r_1$ 内的一点 β，并且有一个以 β 为心、包含 γ 的圆盘相对应，使得 $f_1(z)$ 可以解析开拓到这圆盘内(图 46). 与 $|z-z_1|=r_1$ 上所有点象这样对应的一组圆盘覆盖 $|z-z_1|=r_1$. 根据覆盖定理，在这组圆盘中有有限个覆盖 $|z-z_1|=r_1$.

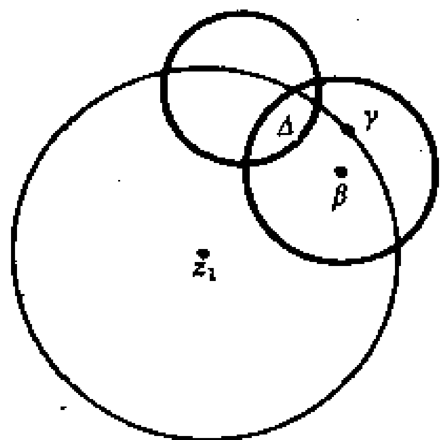


图 46

在覆盖 $|z-z_1|=r_1$ 的有限个圆盘中，考虑任意两个相交的，并设其公共部分为 Δ, 设从 $f_1(z)$ 解析开拓到这两圆盘内的函数分别是$f_m(z)$及 $f_n(z)$, 那么在 Δ 与 $|z-z_1|<r$ 的公共部分内，$f_m(z)=f_n(z)=f(z)$. 因此根据解析函数的唯一性，在整个 Δ 内 $f_m(z)=f_n(z)$.

这样，$f(z)$可以解析开拓到上述有限个圆盘与 $|z-z_1|<r_1$ 所组成的区域内. 显然 D_1 内包含一个心在 z_1、半径大于 r_1 的圆盘，从而(2.1)的收敛半径大于 r_1；与所设矛盾. 因此在 $|z-z_1|=r_1$ 上至少有 $f_1(z)$的一个奇点.

由定理 2.1,解析函数在一点幂级数的收敛半径，等于从这点到最近的奇点的距离. 在例 1、例 2 以及例 3 中，有关幂级数展式在收敛圆上分别有奇点 1 及 -1. 结合第四章第三段，例 1 及例

2，可以看出，根据幂级数在其收敛圆上一点收敛或发散，不能判断这点究竟是否奇点．

某些幂级数所定义的解析函数不能解析开拓到收敛圆外；这时收敛圆上每一点都是奇点．现举例如下：

例 4 函数

$$f(z)=z+z^2+z^4+\cdots=\sum_{n=0}^{+\infty} z^{2^n}$$

的收敛半径是 1．求证 $|z|=1$ 上的每一点都是 $f(z)$的奇点；这时 $|z|=1$ 称为$f(z)$的自然边界．

先证 $z=1$ 是$f(z)$的一个奇点．为此，只须证明在$|z|<1$内，当 $z\to 1$时，$f(z)$不趋于一有限极限．

设 ρ 是小于 1 的任一正数．那么对于任何正整数 N，

$$f(\rho)=\sum_{n=0}^{+\infty} \rho^{2^n} \geqslant \sum_{n=0}^{N} \rho^{2^n} \geqslant (N+1)\rho^{2^N}.$$

在上式中令 $\rho\to 1-0$，就有

$$f(\rho)\geqslant N+1> N,$$

亦即可找到 $\rho_0(0<\rho_0<1)$，使得当 $\rho_0<\rho<1$ 时，$f(\rho)>N$．由于 N 是任意正整数，我们有

$$\lim_{\rho\to 1-0} f(\rho)=\infty .$$

因此 $z=1$ 是一奇点．

其次，由于 $f(z)=z+f(z^2)$，$f(z)$在 $z^2=1$，亦即 $z=1$ 及 $z=-1$ 处不解析．同样，由于 $f(z)=z+z^2+f(z^4)$，满足 $z^4=1$ 的点是 $f(z)$ 的奇点．以此类推，对任何正整数 n，满足 $z^{2^n}=1$ 的点，亦即 1 的 2^n 次根，都是$f(z)$ 的奇点．因为 $|z|=1$ 上每一点或者是这些奇点中的一个，或者是它们的聚点，所以 $|z|=1$ 上每一点都是奇点．

3．一般概念 在上两段中，我们已经讲过怎样应用对称原理及幂级数进行解析开拓．现在阐明解析开拓的一般概念．

设函数$f(z)$在区域D内解析．$f(z)$和D合称为解析函数元素，或简称函数元素，记作(f, D)．设已给两函数元素(f_1, D_1)及(f_2, D_2)，D_1及D_2的公有部分是一区域，并且在它们所公有的区域内：$f_1(z)=f_2(z)$，那么我们说(f_1, D_1)及(f_2, D_2)互为直接解析开拓．

如果函数元素(f_2, D_2)是(f_1, D_1)的直接解析开拓，那么$f_2(z)$由$f_1(z)$所完全确定．事实上，如果函数元素(g_2, D_2)在D_1及D_2所公有的区域内，满足$g_2(z)=f_1(z)=f_2(z)$，那么由解析函数的唯一性（第四章定理6.2），在D_2内$g_2(z)=f_2(z)$．

设已给函数元素(f_1, D_1)，(f_2, D_2)，…，(f_n, D_n)，其中(f_k, D_k)是(f_{k-1}, D_{k-1}) $(k=2, 3, \cdots, n)$的直接解析开拓，并且D_1，D_2，…，D_n中任意两区域或者没有公有部分，或者其公有部分是一区域，那么我们说(f_1, D_1)，(f_2, D_2)，…，(f_n, D_n)构成一个函数元素链，并且说(f_1, D_1)及(f_n, D_n)互为解析开拓．

设已给一组函数元素，其中任意两函数元素互为解析开拓，那么我们说这组函数元素确定一个一般解析函数，并用一个函数记号表示．如果一个一般解析函数包含其中任一函数元素的一切解析开拓，那么这一解析函数称为完全解析函数．特别，在一区域内解析的函数是一个一般解析函数；确定这个一般解析函数的可以看作只有一个函数元素，即已给函数及其定义区域．整函数，e^z，$\sin z$及$\cos z$是在复平面上确定的一般解析函数，而且它们显然是完全解析函数．上段例4中的函数是在单位圆盘内的完全解析函数．一般解析函数或完全解析函数既可能是单值的，也可能是多值的；可分别称为解析函数或多值解析函数．

由于互为直接解析开拓的任意两函数元素彼此相互完全确定，不难推出，一个一般解析函数可由它的任一函数元素所完全确定．

已给一个一般解析函数 $f(z)$．设 $(f_{t'}, D_{t'})$ 及 $(f_{t''}, D_{t''})$ 是确定它的任意两函数元素，但 $D_{t'}$ 及 $D_{t''}$ 有公有区域，如果在 $D_{t'}$ 及 $D_{t''}$ 所公有的区域内，$f_{t'}(z)=f_{t''}(z)$，那么我们把 $D_{t'}$ 及 $D_{t''}$ 所公有的这一区域和 $D_{t'}$ 及 $D_{t''}$ 的其它部分联合起来看作同一区域；否则我们就把它看作分别在 $D_{t'}$ 内及 $D_{t''}$ 内的不同区域．考虑确定 $f(z)$ 的所有函数元素的定义区域，并且把它们象这样联合起来．如果 $f(z)$ 是单值函数，联合所有函数元素的定义区域仍然得到一个区域；如果 $f(z)$ 是多值函数，我们就得到一个推广的区域，称为函数 $f(z)$ 的黎曼面．

为了直观地理解上述各区域的联合过程，我们用不同纸片作出它们的模型．象上面所讲的那样，如果在 $D_{t'}$ 及 $D_{t''}$ 所公有的区域内，$f_{t'}(z)=f_{t''}(z)$，我们把 $D_{t'}$ 及 $D_{t''}$ 的相应部分粘连起来．把 $f(z)$ 的所有函数元素的定义区域象这样粘连起来后，按照不同的情况，我们就得到一个区域或推广的区域（黎曼面）．

以下通过两个例子说明一般解析函数及黎曼面概念．

例 1 根据第二章第 5 段，对数函数

$$w=\mathrm{Ln}\,z=\ln|z|+i\,\mathrm{Arg}\,z \quad (z\neq 0)$$

在一区域内的连续分枝就是它在这一区域内的解析分枝．我们依次分别取 $w=\mathrm{Ln}\,z$ 在下半平面、右半平面、上半平面及左半平面内的解析分枝如下：

$$f_n(z)=\ln|z|+i\arg z \qquad \left(-\pi+n\cdot\frac{\pi}{2}<\arg z<n\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

并且把这些函数的定义区域分别记作 G_n：$-\pi+n\cdot\dfrac{\pi}{2}<\arg z<n\cdot\dfrac{\pi}{2}$ $(n=0,\pm 1,\pm 2,\pm 3,\cdots)$．显然，$G_n$ 及 G_{n+4k} 表示同一区域，并且在 G_n 及 G_{n+1} 的公有区域内，

$$f_n(z)=f_{n-1}(z) \quad (n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots;k=0,\pm 1,\pm 2\ \cdots).$$

把各函数元素 (f_n, G_n) 排列如下：

$$\cdots, (f_{-n}, G_{-n}), \cdots, (f_{-1}, G_{-1}), (f_0, G_0), (f_1, G_1), (f_2, G_2), \cdots,$$
$$(f_n, G_n), \cdots. \tag{3.1}$$

在(3.1)中，每个函数元素是它相邻函数元素的直接解析开拓；任意两函数元素之间的一切函数元素构成一个函数元素链．因此(3.1)中所有函数元素确定一个一般解析函数，即对数函数 $w=\mathrm{Ln}\, z$；它是一个多值解析函数．

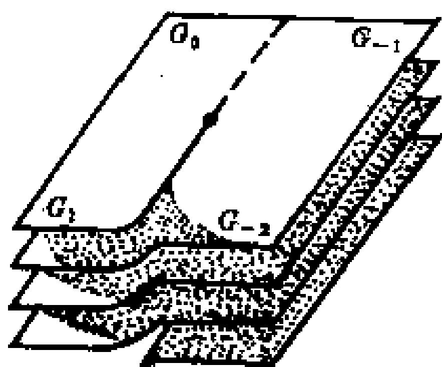


图 47

把各函数元素 (f_n, G_n) 的定义区域看作在不同平面上，并且用纸片作出它们的模型．分别粘连 G_n 及 G_{n+1} 的公有区域 $(n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$，最后就得到一个有无穷叶的面，即 $w=\mathrm{Ln}\, z$ 的黎曼面(图 47)．0 及 ∞ 不在这一黎曼面内；在包含它们之中任何一点的区域内，不可能把 $w=\mathrm{Ln}\, z$ 分成解析分枝．0 及 ∞ 是多值解析函数 $w=\mathrm{Ln}\, z$ 的枝点．

例 2 在例1 中所确定的区域 G_k 内，可以把根式函数

$$w=\sqrt[n]{z}=e^{\frac{1}{n}\mathrm{Ln}\, z}=e^{\frac{1}{n}(\ln|z|+i\mathrm{Arg}\, z)}$$
$$=\sqrt[n]{|z|}\, e^{i\frac{\mathrm{Arg}\, z}{n}}$$

分成解析分枝

$$g_k(z)=\sqrt[n]{|z|}\, e^{i\frac{\arg z}{n}}\left(-\pi+k\cdot\frac{\pi}{2} \quad \arg z<k\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

这里 n 是大于 1 的整数．由于 G_0 及 G_{4n} 是同一区域，并且 $g_0(z)=g_{4n}(z)$，等等，不难看出，与上列各解析分枝相对应，我们只

有 $4n$ 个不同的函数元素

$$(g_0, G_0), (g_1, G_1), \cdots, (g_{4n-1}, G_{4n-1}). \qquad (3.2)$$

在 G_k 及 $G_{k+1}(k=0,1,\cdots,4n-2)$的公有区域内，

$$g_k(z)=g_{k+1}(z);$$

在 G_{4n-1} 及 G_0 的公有区域内，

$$g_{4n-1}(z)=g_0(z).$$

在(3.2)中，每个函数元素是它相邻的函数元素的直接解析开拓；而(3.2)中所有函数元素确定一个一般解析函数，即根式函数 $w=\sqrt[n]{z}$；它是一个多值解析函数.

把各函数元素(g_k, G_k)的定义区域 G_k 看作在不同平面上，并且用纸片作出它们的模型. 分别粘连 G_k 及 $G_{k+1}(k=0,1,2,\cdots,4n-2)$的公有区域，并且最后粘连 G_{4n-1} 及 G_0 的公有区域. 于是最后得到一个有 n 叶的面，即 $w=\sqrt[n]{z}$ 的黎曼面.

我们要注意，在我们的模型上最后一次粘连在实际上是无法完成的，因为在 G_{4n-1} 及 G_0 之间还隔有 $n-1$ 个纸片. 因此，最后一次粘连应当这样来理解，即把 G_{4n-1} 及 G_0 内坐标相同的点看作同一点.

0 及 ∞ 不在上述黎曼面内；在包含它们之中任何一点的区域内，不可能把 $w=\sqrt[n]{z}$ 分成解析分枝. 0 及 ∞ 是多值解析函数 $w=\sqrt[n]{z}$ 的枝点.

除了上面所举的例子外，其他一些初等多值函数如反正弦及反正切函数等也都是多值解析函数，论证从略.

4. 沿曲线的解析开拓 · *单值性定理 在本段中，把上段解析函数元素(f, D)定义中的 D 确定为圆盘；在函数元素链$(f_1, D_1), (f_2, D_2), \cdots, (f_n, D_n)$中，设圆盘 D_k(或 D_{k-1})的圆心在 D_{k-1}(或 D_k)内$(k=2,3,\cdots,n)$. 与上段中一样，通过这一函数元素链，可定义(f_1, D_1)及(f_n, D_n)互为解析开拓. 如果 $D_1, \cdots, D_n$ 的圆心依序在一条简单连续曲线 γ 上，而 γ 的端点分别是 D_1

及 D_n 的圆心，那么我们说 (f_n, D_n) 是 (f_1, D_1) 沿曲线 γ 的解析开拓.

这样，对于每一函数元素 (f_k, D_k)，$f_k(z)$ 在 D_k 内可用幂级数来表示，因而对于研究或计算，往往比较方便. 由于函数在一点解析必在这点有幂级数展式，把函数元素按照本段中的定义理解，所得完全解析函数与上段中定义的完全一样.

我们知道，由 $\mathrm{Ln}\, z$ 在 $z_0(\neq 0)$ 附近的一个解析分枝，可构成一个解析函数元素. 在围绕原点且不含原点的一个区域内，沿区域内从 z_0 出发的任一条简单连续曲线，这一函数元素可以解析开拓. 但由此得到的一般解析函数是多值的. 可是对于单连通区域，我们有单值性定理：

***定理 4.1 设 G 是 z 平面上的一个单连通区域，但不是整个 z 平面. 设 (f, D) 是一解析函数元素，$D\subset G$，并且沿 G 内从 D 的圆心出发的任何简单连续曲线，(f, D) 能解析开拓，那么存在着 G 内的一个单值解析函数 $g(z)$，使得在 D 内，$g(z)=f(z)$.**

证 用黎曼保形映射定理进行证明. 设 D 的圆心是 a，由假设，存在着 G 内的一个单叶函数 $w=\varphi(z)$，使得 $\varphi(G)=K$，$\varphi(a)=0$，其中 $K=\{w \mid |w|<1\}$. $w=\varphi(z)$ 的反函数 $z=\psi(w)$ 在 K 内单叶，$\psi(K)=G$，$\psi(0)=a$.

由 $\psi(w)$ 的连续性，存在着以 $w=0$ 为心的一个小圆 k，使得 $\forall w\in k$，$\psi(w)\in D$. 因此 $f(\psi(w))$ 在 k 内解析，并且可以展开成幂级数

$$f(\psi(w))=\sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n w^n. \tag{4.1}$$

设上式右边幂级数的收敛圆盘是 k'，那么它的和函数

$$F(w)=\sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n w^n \tag{4.2}$$

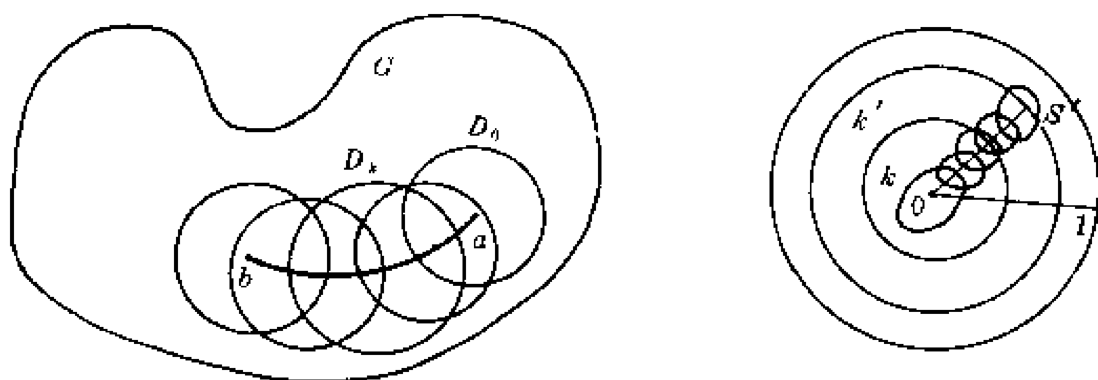


图 48

在 k' 内解析，并且在 k 内，

$$F(w)=f(\psi(w)).\tag{4.3}$$

如果能证明 k' 的半径 $\rho\geqslant 1$，那么就证明了定理 4.1．事实上，这时 $F(w)$ 在 $|w|<1$ 内解析，从而 $g(z)=F(\varphi(z))$ 在 G 内解析．如果 z 在 a 点的一个邻域内，$\varphi(z)\in k$．于是由 (4.3)，在这邻域内(图 48)，

$$g(z)=F(\varphi(z))=f(\psi(\varphi(z)))=f(z).$$

因此在 D 内，$g(z)=f(z)$．

现在来证明 $\rho\geqslant 1$．假定 $\rho<1$．那么 $F(w)$ 在 $|w|=\rho$ 上有一奇点 w'．在映射 $z=\psi(w)$ 下，$w=0$ 到 w' 的线段 $\overline{Ow'}$ 映射成 G 内从 a 到 $b=\psi(w')$ 的一条简单连续曲线 γ．由假设，(f,D) 可沿曲线 γ 解析开拓．设解析函数元素链 (f,D)，(f_1,D_1)，…，(f_n,D_n) 实现这一开拓．这就是说，D 及 D_n 的圆心是 γ 的端点，$D_0=D$，D_1，…，D_r 的圆心依序在 γ 上，D_{k+1} 的圆心属于 D_k，而且在 $D_k\bigcap D_{k+1}$ 内，$f_k(z)=f_{k+1}(z)$ $(k=0,1,\cdots,n-1;f_0=f)$．设 $\varphi(D_j)=R_j$，那么 $\psi(R_j)=D_j$．于是 $0\in R_0$，$w'\in R_n$，而且 R_j 是包含在 $|w|<1$ 内的区域．

我们有：$\forall z \in D \cap D_1$，$f(z)=f_1(z)$，从而 $\forall w \in R_0 \cap R_1$，

$$f(\psi(w))=f_1(\psi(w)).$$

于是 $\forall w \in R_1 \cap \{w \mid |w| < \rho\}$，

$$F(w)=f_2(\psi(w)).$$

依此类推，$\forall w \in R_n \cap \{w \mid |w| < \rho\}$，

$$F(w)=f_n(\psi(w)).$$

但 $f_n(\psi(w))$在 R_n 内解析，因此 w'不可能是 $F(w)$的奇点，与假定相矛盾．于是 $\rho \geqslant 1$，证完．

由定理 4.1 可以看出，在沿曲线解析开拓时，采用不同的函数元素链，从曲线一端点处的函数元素出发，总可得到另一端点处的同一函数元素．

从定理 4.1 不难推出，这定理在 $G=\mathbb{C}$ 时仍然成立．

§ 2．多角形映射公式

5．基本公式 黎曼定理保证了不是全平面的单连通区域与单位圆盘之间有保形双射．本节中研究多角形的内区域的映射公式．由于单位圆盘可映射成上半平面，为了便于应用对称原理，现研究多角形的内区域与上半平面之间的映射．

设单叶函数 $w=f(z)$及其反函数 $z=F(w)$实现 w 平面上顶点为 $w_k(\neq\infty)(k=1,2,3,\cdots,n)$的简单多边形(其边界不相交)的内区域 P 与上半 z 平面之间的保形映射；设 x_k 是 w_k 的象 $(x_1<x_2<\cdots<x_n)$，它们都是实轴上的有限点(图 49)．设多角形在 w_k 的顶角为 β_k 弧度 $(0<\beta_k\leqslant 2\pi,\ \beta_k\neq\pi)$．

首先研究 $f(z)$在上半平面内 x_k 附近的展式．引进补助变量 $\omega=(w-w_k)^{\frac{\pi}{\beta_k}}$．复合函数

$$\omega=[f(z)-w_k]^{\frac{\pi}{\beta_k}} \tag{5.1}$$

把 x_k 的充分小的邻域中属于上半 z 平面的一部分，映射成为 ω 平面上的一部分；它包含原点，并包含 ω 平面上某一半平面的一部分

（图49）．根据对称原理，函数 $\omega(z)$ 可以解析开拓到 x_k 的整个邻域，从而它在 x_k 有泰勒展式

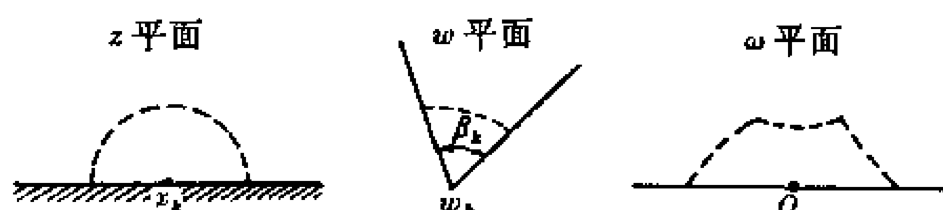


图 49

$$\omega(z)=\alpha_1{}'(z-x_k)+\alpha_2{}'(z-x_k)^2+\cdots \qquad (5.2)$$

其中无常数项，这是由于 $\omega(x_k)=0$；$\alpha_1{}'=\omega'(x_k)\neq 0$，这是由于所确定的映射是双射．由（5.1）及（5.2），我们得到

$$f(z)=w_k+(z-x_k)^{\frac{\beta_k}{\pi}}\left[\alpha_1{}'+\alpha_2{}'(z-x_k)+\cdots\right]^{\frac{\beta_k}{\pi}}.$$

因为方括号中的式子在 $z=x_k$ 时不为零，所以在这点附近可取它的一个单值解析分枝，并把它展开为泰勒展式．于是在上半平面且在 x_k 附近

$$f(z)=w_k+(z-x_k)^{\frac{\beta_k}{\pi}}\left[\alpha_0+\alpha_1(z-x_k)+\cdots\right], \quad (5.3)$$

其中 $\alpha_0\neq 0$．显然 x_k 是 $f(z)$ 的枝点．

现在进一步研究 $w=f(z)$．由对称原理，$w=f(z)$ 可越过 (x_{k-1}, x_k) 解析开拓到下半 z 平面．开拓出的函数把下半 z 平面映射成与 P 关于 w_{k-1} 及 w_k 的联线为对称的多角形内区域 P'（$k=1,2,3,\cdots,n$）[①]．其次，这一函数又可越过 (x_k, x_{k+1}) 开拓为在上半平面解析的函数 $f_*(z)$，它把上半平面映射成与 P' 关

① (x_0, x_1) 表示区间 (x_n, x_1)，即以 x_n，x_1 为端点，且包含 ∞ 的"区间"；w_0 表示 w_n．(x_n, x_{n+1}) 也表示区间 (x_n, x_1)，w_{n+1} 及 w_{n+1}' 表示 w_1 及 w_1'．

于 w_k 及 w'_{k+1} 的联线为对称的多角形内区域 P''(图 50)，在这里 w'_{k+1} 是与 w_{k+1} 关于 w_{k-1} 及 w_k 的联线为对称的点．显然 P''可从 P 通过坐标轴的平移及旋转而得．由于 $w=f(z)$及 $w=f_*(z)$分别把上半 z 平面映射为 P 及 P''，我们有

$$f_*(z)=af(z)+\beta \tag{5.4}$$

其中 a 及β 是复常数，$|a|=1$；这表明当 z 围绕 x_k 连续变化时，$w=f(z)$有多值性．

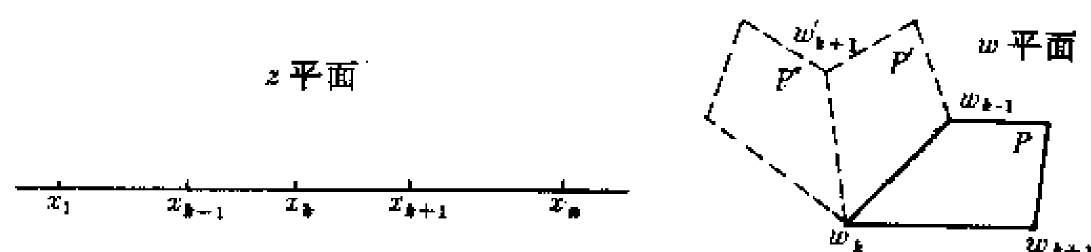


图 50

从形式特别简单的(5.4)式出发，容易导出一个单值函数，我们有

$$\frac{f_*''(z)}{f_*'(z)}=\frac{f''(z)}{f'(z)}.$$

这样，虽然 x_k 是 $w=f(z)$的枝点，而当 z 围绕 x_k 连续变化时，函数$g(z)=\dfrac{f''(z)}{f'(z)}$ 不变．这一函数具有下列性质：

(1) $g(z)$在整个 z 平面上是单值的．

(2) $g(z)$在 z 平面上除去 $x_k(k=1,2,3,\cdots,n)$外解析．这是由于 $f(z)$的每一分枝在任何 $z_0(\neq x_k)$的充分小的邻域内单叶解析，从而其导数在 z_0 不为零．

(3) $g(z)$在 $z=x_k(k=1,2,3,\cdots,n)$有一阶极点．在 $z=x_k$ 的充分小的邻域内任一点 $z(\neq x_k)$，由(5.3)，

$$f'(z)=\frac{\beta_k}{\pi}(z-x_k)^{\frac{\beta_k}{\pi}-1}[\alpha_1'+\alpha_2''(z-x_k)+\cdots]$$

$$=\frac{\beta_k}{\pi}(z-x_k)^{\frac{\beta_k}{\pi}-1}\psi(z-x_k),$$

其中α_2''为一常数，$\psi(z-x_k)$在$z=x_k$解析，$\psi(0)\neq 0$. 由此得

$$f''(z)=\frac{\beta_k}{\pi}\left(\frac{\beta_k}{\pi}-1\right)(z-x_k)^{\frac{\beta_k}{\pi}-2}\left[\psi(z-x_k)\right.$$

$$\left.+\frac{\pi(z-x_k)}{\beta_k-\pi}\psi'(z-x_k)\right],$$

$$g(z)=\left(\frac{\beta_k}{\pi}-1\right)\frac{1}{z-x_k}+\theta(z-x_k),$$

其中$\theta(z-x_k)$在$z=x_k$解析. 因此$g(z)$在$z=x_k$有一阶极点.

由(1)—(3)，我们有

$$g(z)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\beta_k}{\pi}-1\right)\frac{1}{z-x_k}+E(z),$$

其中$E(z)$为整函数，为了确定$E(z)$，现研究$g(z)$在$z=\infty$的邻域内的性质. 由于$w=f(z)$的一枝把$z=\infty$映射成为w_n与w_1的联线上某一点，当$|z|$充分大时，

$$f(z)=r_1'+\frac{r_2'}{z}+\frac{r_3'}{z^2}+\cdots,$$

从而

$$g(z)=\frac{f''(z)}{f'(z)}=-\frac{2}{z}+\frac{r_2}{z^2}+\cdots.$$

由此可见，当$z\to\infty$时，$E(z)\to 0$，从而在整个z平面上有界. 由刘维尔定理，$E(z)\equiv$常数，且此常数必然为零. 于是

$$g(z)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\beta_k}{\pi}-1\right)\frac{1}{z-x_k}.$$

因为 $g(z)=\dfrac{d}{dz}\operatorname{Ln}f'(z)$,所以在上半 z 平面沿任何曲线取 $g(z)$ 的积分，并将所得结果作为 e 的幂，就得到

$$f'(z)=C\prod_{k=1}^{n}(z-x_k)^{\frac{\beta_k}{\pi}-1}.$$

其中 C 为一常数．于是我们有：

定理 5.1　设函数 $w=f(z)$ 把上半平面 $\operatorname{Im} z>0$ 保形双射成顶角为 $\beta_k(0<\beta_k\leqslant 2\pi,\ \beta_k\neq\pi;\ k=1,2,3,\cdots,n)$ 的多角形的内区域 P，而且实轴上的点 $x_k(-\infty<x_1<x_2<\cdots<x_n<+\infty)$ 对应于多角形的顶点，那么

$$f(z)=C\int_{z_0}^{z}\prod_{k=1}^{n}(z-x_k)^{\frac{\beta_k}{\pi}-1}dz+C_1, \tag{5.5}$$

其中 z_0，C 及 C_1 是常数．

(5.5)称为多角形映射公式，也称为希瓦尔兹－克里斯托非尔公式．

在定理 5.1 中，x_k 是 P 的顶点在实轴上的对应点．可是求 $w=f(z)$ 时，事先只知道 P 的顶点，而不知道 x_k．根据保形映射时的边界对应关系，在这些 x_k 中，有三个点可以任意确定，而其余那些点以及常数 C 与 C_1，就必须由问题的条件来确定（z_0 可任意确定）．下面将通过具体的例子来说明怎样确定这些点和常数．

在定理 5.1 所考虑的问题中，如果 x_n 变为无穷远点，那么公式(5.5)要变成怎样的形状呢？

为了将这种情形化成以前的情形，作变换[①]

---

① 如果有一个 $x_k=0$，那么不取(5.6)，而取 $\zeta=x_n'-\dfrac{1}{z-x_0}$，其中 $x_0\neq x_k(k=1,2,3,\cdots,n)$．

$$\zeta = x_n' - \frac{1}{z}, \tag{5.6}$$

它把半平面 $\operatorname{Im} z>0$ 变为 $\operatorname{Im}\zeta>0$，且使 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ 变为实轴上的有限点 $x_1', x_2', x_3', \cdots, x_n'$. 这时，由(5.5)，将 $\operatorname{Im}\zeta>0$ 变为 P 的函数 $w=f(\zeta)$ 是

$$f(\zeta)=C'\int_{\zeta_0}^{\zeta}\prod_{k=1}^{n}(\zeta-x_k')^{\frac{\beta_k}{\pi}-1}d\zeta+C_1',$$

在这里 C' 及 C_1' 是复常数. 在上面公式中作变换(5.6)，注意到 $\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n=(n-2)\pi$，我们有

$$w=C'\int_{z_0}^{z}\prod_{k=1}^{n-1}[(x_n'-x_k')z-1]^{\frac{\beta_k}{\pi}-1}\frac{dz}{z^{(\beta_1+\cdots+\beta_n)/\pi-n+2}}+C_1'$$

$$=C\int_{z_0}^{z}\prod_{k=1}^{n-1}(z-x_k)^{\frac{\beta_k}{\pi}-1}dz+C_1, \tag{5.7}$$

其中 C 及 C_1 为复常数.

这样，如果无穷远点对应于多角形 P 的一个顶点，那么在公式(5.5)中，与这顶点对应的因子就没有了.

6. 实例 在本段中，我们举例说明怎样应用多角形映射公式.

例 1 把上半平面 $\operatorname{Im} z>0$ 保形双射为 w 平面上边长为 $2a$ 的等边三角形 ABC 的内区域(图 51).

选择 z 平面上 $-1, 0, 1$ 三点以 A, B, C 为象，那么所求的映射函数是

$$w=C\int_{-1}^{z}(t+1)^{-\frac{2}{3}}(-t)^{-\frac{2}{3}}(1-t)^{-\frac{2}{3}}dt+C'. \tag{6.1}$$

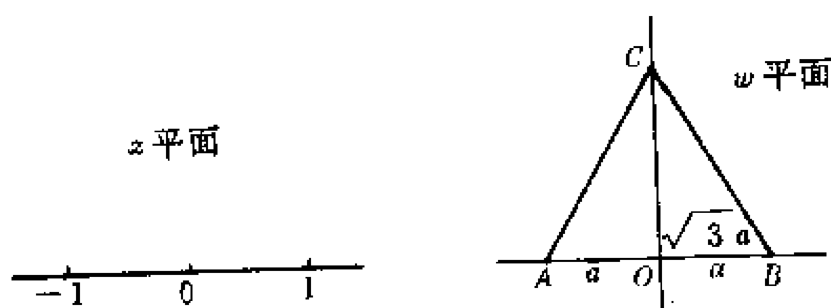


图 51

设当 z 在 $(-1,0)$ 上时，其中每一根式取主值．由 $z=-1$，$w=-a$，可见 $C'=-a$．又由 $z=0$，$w=a$ 以及

$$a=-a+C\int_{-1}^{0}(t+1)^{-\frac{2}{3}}(-t)^{-\frac{2}{3}}(1-t)^{-\frac{2}{3}}dt,$$

可得

$$2a=C\int_{0}^{1}s^{-\frac{2}{3}}(1-s^{2})^{-\frac{2}{3}}ds$$

$$=\frac{C}{2}\int_{0}^{1}u^{-\frac{5}{6}}(1-u)^{-\frac{2}{3}}du$$

$$=\frac{C}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)},$$

从而

$$C=\frac{4a\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}.$$

例 2 把上半平面$\mathrm{Im}\,z>0$保形双射成 w 平面上一个矩形 $A_1A_2A_3A_4$ 的内区域(图 52).

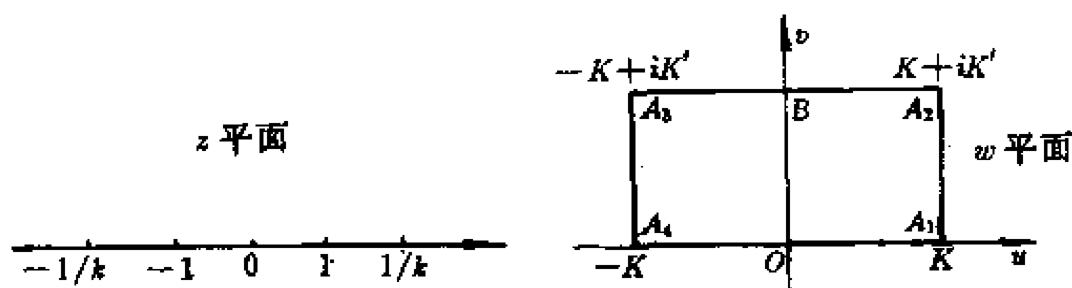


图 52

首先考虑 z 平面的第一象限到已给矩形内区域右边一半 OA_1A_2B 的保形映射,而使 O, A_1, B 分别与 $0,1,\infty$ 相对应.设点 A_2 由 $\frac{1}{k}$ 映射而得,这里 $0<k<1$. 把这一映射按对称原理通过上半 y 轴开拓,就得到所求映射;由此可见,A_3 与 $-\frac{1}{k}$ 相对应.因而所求映射可写成

$$w=C'\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(z^2-1)\left(z^2-\frac{1}{k}\right)}}+C_1$$

$$=C\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}+C_1.$$

由 $z=0$, $w=0$, 可得 $C_1=0$. 为了确定 C 及 k, 要用到 $z=1$, $w=K$:

$$K=C\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}, \qquad (6.2)$$

以及 $z=\frac{1}{k}$, $w=K+iK'$:

$$K+iK'=C\int_0^1+C\int_1^{\frac{1}{k}}=K+iC\int_1^{\frac{1}{k}}\frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}}$$

(把从 0 到 $\frac{1}{k}$ 的积分分成从 0 到 1 以及从 1 到 $\frac{1}{k}$ 两部分，并且利用等式(6.2))．由此可得

$$K'=C\int_1^{\frac{1}{k}}\frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}}. \qquad (6.3)$$

由(6.2)及(6.3)可求出 C 及 k．

如果设 $k\,(0<k<1)$ 及 $C=1$ 为已知，则可由(6.2)及(6.3)确定 K 及 K'．于是所求映射为

$$w=\int_0^z\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}. \qquad (6.4)$$

积分(6.4)是一种所谓椭圆积分，它的反函数是一种雅可比椭圆函数，并称为椭圆正弦(在 $C=1$ 时)，记作 $z=\operatorname{sn}w$．

多角形映射公式可应用到某些顶点为无穷远点的“多角形”．举例如下：

例 3 把上半平面 $\operatorname{Im}z>0$ 保形双射为 w 平面上的半带域 $-\frac{\pi}{2}<\operatorname{Re}w<\frac{\pi}{2}$，$\operatorname{Im}w>0$．

本题实际上与第六章第 10 段的例 4 相同，但要把这例中 z 平面及 w 平面的地位互相交换．如图 40，作映射，把 z 平面上 -1，1 及 ∞ 三点分别映射成为 w 平面上 A，C 及 $D(\infty)$ 三点．由(5.7)，所求的映射是

$$w = C\int_{-1}^{z} \frac{dt}{\sqrt{1+t}\ \sqrt{1-t}} + C_1$$

$$= C\int_{-1}^{z} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} + C_1,$$

其中根式取主值．由 $z=-1$，$w=-\frac{\pi}{2}$，可见 $C_1=-\frac{\pi}{2}$；又由 $z=1$，$w=\frac{\pi}{2}$，则有

$$w = C\int_{-1}^{1} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} - \frac{\pi}{2} = C\pi - \frac{\pi}{2},$$

于是 $C=1$．因此，我们得到

$$w = \int_{-1}^{z} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} - \frac{\pi}{2}$$

$$= \arcsin z,$$

从而

$$z = \sin w.$$

与过去所得结果一致．

习 题 七

1．证明对称原理的推广．

2．设函数 $w=f(z)$ 在 $\operatorname{Im} z \geqslant 0$ 上单叶解析，并且把 $\operatorname{Im} z>0$ 保形映射成 $|w|<1$，把 $\operatorname{Im} z=0$ 映射成 $|w|=1$．证明 $f(z)$ 一定是分式线性函数．

3．级数

$$-\frac{1}{z} - 1 - z - z^2 - \cdots$$

在 $0<|z|<1$ 内所定义的函数是否可以解析开拓为级数

$$\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^4}+\cdots$$

在 $|z|>1$ 内所定义的函数？

4．证明：级数

$$f_1(z)=z-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{3}z^3-\cdots$$

与

$$f_2(z)=\ln 2-\frac{1-z}{2}-\frac{(1-z)^2}{2\cdot 2^2}-\frac{(1-z)^3}{3\cdot 2^3}\cdots$$

在 $|z|<1$ 与 $|z-1|<2$ 内所定义的函数互为直接解析开拓．

5．证明：级数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^n$$

所定义的函数在左半平面内解析，并可解析开拓到除掉点 $z=0$ 外的整个复平面．

6．证明：如果整函数 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n z^n$ 在实轴上取实值，那么系数 a_n 都是实的．

7．试问下列实变数实值函数能否解析开拓到复平面上：

(1) $f(x)=|x|$；

(2) $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & (\text{当 } x\neq 0 \text{ 时}), \\ 0 & (\text{当 } x=0 \text{ 时})； \end{cases}$

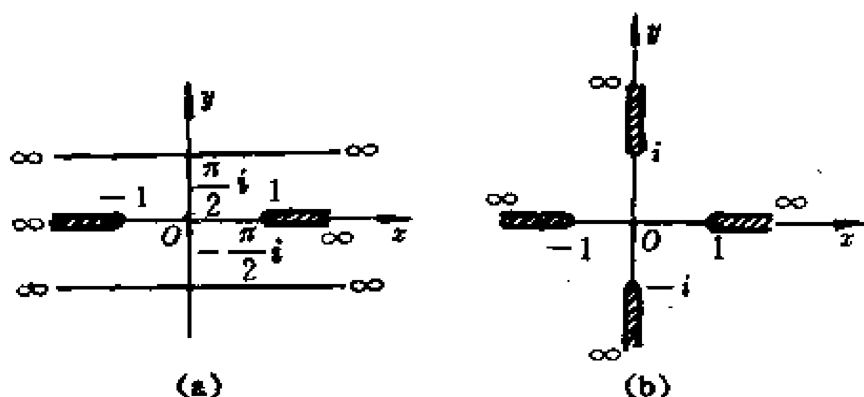
(3) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上任一点可展开成实幂级数．

8．证明 $f(z)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}z^{n!}$ 的自然边界是 $|z|=1$．

9．函数 $w=\sqrt{e^z}$ 是否是多值解析函数？

10．试作函数 $f(z)=\sqrt{z+1}$ 的黎曼面．

11．试用对称原理把下列图形所示的区域分别保形映射为上半平面：



第11题

12．证明：把 z 平面上的单位圆盘保形双射成 w 平面上多角形 P 的映射公式是

$$w=C\int_{z_0}^{z}\prod_{k=1}^{n}(z-z_k)^{\frac{\beta_k}{\pi}-1}dz+C',$$

其中 β_k 是 P 的各顶角的弧度，z_k 是 $|z|=1$ 上与 P 的各顶点相对应的点，z_0，C 及 C' 是复常数．

13．求作把单位圆盘映射成正方形的单叶函数．

14．用多角形映射公式(5.7)解第六章第9段的例3．

［提示］所述例中 w 平面上的区域可看作一个多角形的内区域．

15．试作保形映射，把圆环 $0<a<|z|<b$ 除去实轴上的区间 (a,b) 而得的区域映射成 $|w|<1$．

第八章　调 和 函 数

§1．调和函数及其性质

1．一般概念　在第二章习题二第 8 题中，我们已经指出，解析函数的实部及虚部满足调和方程即拉普拉斯方程，并且称为调和函数．实际问题中所遇到的一些函数都是解析函数的实部或虚部，亦即调和函数．由此可见，这种函数在理论上及实践上都有重要的意义．本章中引进二元调和函数及其一些性质，其中许多性质都可以从解析函数推导出来．我们还将研究这类函数的一种边值问题．二元调和函数可推广到更多个变元情形，不过这时不能应用解析函数进行研究；本章将不涉及这方面的问题．

偏微分方程

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{1.1}$$

叫做二维调和方程，也叫做二维拉普拉斯方程．设两个实变数的实函数 $u=u(x,y)$ 在一个区域 D 内有连续的一阶及二阶偏导数，并且满足二维调和方程，那么它就叫做二元调和函数，或简称调和函数．由于本章不讨论多元调和函数，象这样简称不会产生混淆．

第二章习题二第 8 题中已经证明：

定理 1.1　**设 $f(z)$ 在区域 D 内解析，那么它的实部和虚部都是在 D 内的调和函数．**

我们自然提出一个问题：在一区域内的调和函数是否是这区域内某一解析函数的实部或虚部？在单连通区域情形，这问题

的答案是肯定的．如果 $u(x,y)$ 是在单连通区域 D 内的调和函数，那么可以找到在 D 内的调和函数 $v(x,y)$，使得

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y) \tag{1.2}$$

在 D 内解析．对任何实常数 C，$v(x,y)+C$ 也和 $v(x,y)$ 一样具有上述性质．

实际上，根据第二章第 2 段，我们只要求得在 D 内有连续的偏导数，并且满足

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x} \tag{1.3}$$

的函数 $v(x,y)$．就是说，要求出函数 $v(x,y)$，使其在 D 内有全微分：

$$-\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy. \tag{1.4}$$

由于 $u(x,y)$ 是调和函数，(1.4) 当然是全微分；又由于 D 是单连通区域，$v(x,y)$ 可由下列线积分确定：

$$\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}-\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy+\text{实常数}. \tag{1.5}$$

这样求得的 $v(x,y)$ 满足条件(1.3)，于是(1.2)所定义的 $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析．

同样，先给出在单连通区域 D 内的调和函数 $v(x,y)$，也可求得 $u(x,y)$，使得(1.2)所定义的 $f(z)$ 在 D 内解析．

在区域 D 内满足条件(1.3)的调和函数 $u(x,y)$ 及 $v(x,y)$ 叫做共轭调和函数．

总结以上结果，我们得到：

定理 1.2　函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在单连通区域 D 内解析的必要与充分条件是：$u(x,y)$ 及 $v(x,y)$ 是在 D 内的共轭

调和函数．已知 $u(x,y)$ 及 $v(x,y)$ 中的一个，就可确定 $f(z)$，不过可能相差一个实数或纯虚数．

例 求一解析函数，使其实部为 x^3-3xy^2．

解 设 $u(x,y)=x^3-3xy^2$，在复平面上任一点，

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2-3y^2,\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-6xy;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=6x,\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-6x.$$

$u(x,y)$ 满足（1.1），从而是调和函数．由于（1.4）是全微分，积分（1.5）与路径无关．由（1.5）求 $v(x,y)$，取从 (x_0,y_0) 到 (x,y_0) 以及从 (x,y_0) 到 (x,y) 的线段作为积分路线，就得到

$$v(x,y)=\int_{x_0}^{x}6xydx+\int_{y_0}^{y}(3x^2-3y^2)dy+C=3x^2y-y^3+C_1,$$

其中 C 及 C_1 为实常数．最后得

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)=(x+iy)^3+iC_1=z^3+iC_1.$$

这里叙述的根据实部求解析函数的方法，也可应用到多连通区域 D 的情形．但这时从积分（1.5）求得的 $v(x,y)$ 一般说来是多值函数，而相应的复变函数是多值解析函数．

解析开拓概念也可转移到调和函数情形．设在单连通区域 D 内的调和函数 $u(x,y)$ 是解析函数 $f(z)$ 的实部或虚部，那么 $f(z)$ 通过解析开拓而得的解析函数的实部或虚部，也是 $u(x,y)$ 通过开拓而得的调和函数，它不但可能是单值的，也可能是多值的．

由于调和函数是解析函数的实部或虚部，而解析函数有任意阶导数，可以看出，调和函数的任意阶偏导数也是调和函数．

最后，我们指出，当自变量的变域经过保形双射后，解析函数仍然变为解析函数；因此这时调和函数也变为调和函数．

2．中值公式与普阿松公式・极值原理 对于解析函数，我们有重要的柯西公式．应用这一公式，可从解析函数在某些区域边界上的值，确定它在区域内任一点的值．现在要对区域为圆盘情形，导出关于调和函数的类似公式．

设 $u(z)=u(x,y)$ 是在闭圆盘 $|z|\leqslant\rho\ (0<\rho<+\infty)$ 上的调和函数[①]．作在 $|z|\leqslant\rho$ 上的解析函数 $f(z)=u(z)+iv(z)$．由柯西公式，并令 $\zeta=\rho e^{i\varphi}$，我们有

$$f(0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=\rho}\frac{f(\zeta)}{\zeta}d\zeta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\rho e^{i\varphi})\,d\varphi.$$

比较上式两边的实部，就得到调和函数的中值定理：

定理 2.1 如果 $u(z)$ 是在闭圆盘 $|z|\leqslant\rho\ (0<\rho<+\infty)$ 上的调和函数，那么

$$u(0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(\rho e^{i\varphi})d\varphi. \tag{2.1}$$

(2.1)叫做调和函数的中值公式．由此可立即推得：

系 2.1 如果 $u(z)$ 是在闭圆盘 $|z-z_0|\leqslant\rho\ (0<\rho<+\infty)$ 上的调和函数，那么

$$u(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(z_0+\rho e^{i\varphi})d\varphi. \tag{2.2}$$

定理 2.1 表明，可从闭圆盘 $|z|\leqslant\rho$ 上调和函数 $u(z)$ 在 $|z|=\rho$ 上的值来确定 $u(0)$．现在研究是否可用这些值来确定 $u(z)$ 在圆盘 $|z|<\rho$ 内任一点的值．我们要应用定理 2.1 和保形映射来解决这一问题．

为了论证方便起见，现取 Z 作为复变数，而用 z 表示复常数．

---

① 即在包含这一闭圆盘的一个区域内的调和函数．

设 $u(Z)$ 是在 $|Z|\leqslant\rho\,(0<\rho<+\infty)$ 上的调和函数．取定 $|Z|<\rho$ 内一点 z．作分式线性函数

$$w=\frac{\rho^2(Z-z)}{-\bar{z}Z+\rho^2}\ ,\quad \text{即} Z=\frac{\rho^2(w+z)}{\bar{z}w+\rho^2}\ . \tag{2.3}$$

它把 $Z=z$ 映射成 $w=0$，把 $|Z|\leqslant\rho$ 映射成 $|w|\leqslant\rho$．通过映射，$u(Z)$ 就变成了 $|w|\leqslant\rho$ 上的调和函数

$$u_1(w)=u\left(\frac{\rho^2(w+z)}{\bar{z}w+\rho^2}\right).$$

对这函数应用定理 2.1，我们有

$$u_1(0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u_1(\rho e^{i\varphi})d\varphi\ , \tag{2.4}$$

其中

$$\rho e^{i\varphi}=\frac{\rho^2(\rho e^{i\varphi}-z)}{-\bar{z}\rho e^{i\varphi}+\rho^2}\ ,$$

$$u_1(0)=u(z)\ ,\ u_1(\rho e^{i\varphi})=u(\rho e^{i\varphi}). \tag{2.5}$$

于是

$$e^{i\varphi}=\frac{\rho e^{i\varphi}-z}{\rho-\bar{z}e^{i\varphi}}\ .$$

在上式两边取对数，然后再求微分，即得

$$d\varphi=\left[\frac{\rho e^{i\varphi}}{\rho e^{i\varphi}-z}+\frac{\bar{z}e^{i\varphi}}{\rho-\bar{z}e^{i\varphi}}\right]d\varphi\ .$$

$$=\frac{\rho^2-z\bar{z}}{|\rho e^{i\varphi}-z|^2}\,d\varphi\ . \tag{2.6}$$

令 $z=re^{i\theta}$，就有

$$d\psi=\frac{\rho^2-r^2}{\rho^2-2\rho r\cos(\varphi-\theta)+r^2}\,d\varphi .\qquad(2.7)$$

把(2.5)及(2.7)代入(2.4)，我们得到：

定理 2.2　如果 $u(z)$ 是在闭圆盘 $|z|\leqslant\rho\ (0<\rho<+\infty)$ 上的调和函数，那么对于 $0\leqslant r<\rho$，

$$u(re^{i\theta})=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(\rho e^{i\varphi})\frac{\rho^2-r^2}{\rho^2-2\rho r\cos(\varphi-\theta)+r^2}\,d\varphi .\qquad(2.8)$$

(2.8)称为普阿松公式；它推广了中值公式(2.1)，而把后者作为特例($r=0$ 情形).

在定理 2.1 与2.2以及系 2.1 中，把"$u(z)$是在 $|z|\leqslant\rho$ 上的调和函数"这一假设，换成"$u(z)$是在 $|z|\leqslant\rho$ 上的连续函数，在 $|z|<\rho$ 内的调和函数"，有关结论仍能成立，证明从略.

我们也可应用保形映射，研究在较一般区域中的调和函数用其边界上的值表示问题.

我们知道，在一区域内解析的函数，如不为常数，其模数必不可能在这区域内达到最大值. 应用调和函数的中值公式，可以导出类似性质. 为了简化证明，现应用解析函数的最大模原理推导出下列结果：

定理 2.3　一个在区域 D 内不为常数的调和函数，不可能在这区域的内点达到最大值或最小值.

证　假定调和函数 $u(z)$($\neq$ 常数)在区域 D 的内点 z_0 处达到最大值. 设圆盘 $|z-z_0|<\rho\ (0<\rho<+\infty)$ 在区域 D 内. 作出在 $|z-z_0|<\rho$ 内解析的函数 $f(z)$，使其实部为 $u(z)$. 显然，$f(z)\neq$ 常数. 于是在 $|z-z_0|<\rho$ 内解析的函数 $e^{f(z)}$($\neq$常数)的模在 z_0 达到最大值 $e^{u(z_0)}$，与最大模原理相矛盾. 因此 $u(z)$ 在 z_0 不可能达到最大值. 考虑函数 $e^{-f(z)}$，可以证明 $u(z)$ 在区域 D 内一点也不可能达到最小值.

定理 2.3 中所说明的事实称为极值原理.

§2. 狄里克莱问题

3. 圆盘上的狄里克莱问题 许多数学物理问题可以化为按照区域边界上的已知值作出在区域内的调和函数. 这类问题称为狄里克莱问题, 现精确表述如下:

求出一个在区域 D 内调和、并且在 D 及其边界所组成的闭区域 $\overline{D}$ 上连续的函数 $u(z)$, 使它在 D 的边界上取已经给定的连续值 $u(\zeta)$.

在应用中, 边界值 $u(\zeta)$ 是连续的这一条件太严, 因此需要考虑广义狄里克莱问题:

设已经在区域 D 的边界 C 上给出一个函数 $u(\zeta)$, 它除去在有限个点 $\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_n$ 处有第一类间断点外, 处处连续. 需要求出一个在区域 D 内的有界调和函数 $u(z)$, 使它在函数 $u(\zeta)$ 的所有连续点处都取值 $u(\zeta)$. 亦即

$$\lim_{z\to\zeta} u(z)=u(\zeta) \quad (z\in D).$$

在本章中, 我们不研究一般区域上的狄里克莱问题, 只就区域为圆盘或半平面情形求解[1]. 现先从圆盘的情形开始.

设在圆 $|\zeta|=\rho\ (0<\rho<+\infty)$ 上给出一个函数 $u(\zeta)$; 除去在有限个点 $\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_n$ 外, 这函数处处连续, 而在这些例外点, $u(\zeta)$ 有第一类间断点. 需要求出函数 $u(z)$, 使其在圆盘 $|z|<\rho$ 内有界调和, 在圆 $|\zeta|=\rho$ 的非例外点 ζ 取值 $u(\zeta)$.

定理 2.2 启发我们, 这问题的解是普阿松积分:

$$u(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\rho e^{i\varphi})\frac{(\rho^2-r^2)d\varphi}{\rho^2-2\rho r\cos(\varphi-\theta)+r^2}$$

---

[1] 通过保形映射, 圆盘内或半平面内的调和函数可映射为不是全平面的单连通区域内的调和函数. 因此这里的结果可转移到较一般的区域.

$$(z=re^{i\theta},\ 0\leqslant r<\rho\ ,\ 0\leqslant\theta<2\pi)\ . \tag{3.1}$$

现分几步证明(3.1)确是问题的解：

(1) $u(z)$在$|z|<\rho$ 内有界.

由(2.6)及(2.7)，可见

$$\frac{\rho^2-r^2}{\rho^2-2\rho r\cos(\varphi-\theta)+r^2}>0\ (0\leqslant r<\rho<+\infty,0\leqslant\varphi,\theta<2\pi). \tag{3.2}$$

其次，对在 $|z|\leqslant\rho$ 上的调和函数 $u(z)\equiv 1$ 应用定理 2.2，我们有

$$1=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\rho^2-r^2}{\rho^2-2\rho r\cos(\varphi-\theta)+r^2}d\varphi$$

$$(0\leqslant r<\rho\ ,\ 0\leqslant\theta<2\pi)\ . \tag{3.3}$$

又由假设，存在着一有限数 M，使

$$|u(\rho e^{i\varphi})|\leqslant M \qquad (0\leqslant\varphi<2\pi). \tag{3.4}$$

因此由(3.1)—(3.4)，

$$|u(z)|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}M\frac{\rho^2-r^2}{\rho^2-2\rho r\cos(\varphi-\theta)+r^2}d\varphi=M$$

$$(|z|<\rho).$$

(2) $u(z)$是在 $|z|<\rho$ 内的调和函数.

由(2.6)，令 $w=\rho e^{i\varphi}$, $z=re^{i\theta}$，我们有

$$\frac{\rho^2-r^2}{\rho^2-2\rho r\cos(\varphi-\theta)+r^2}=\frac{w}{w-z}+\frac{\overline{z}}{\overline{w}-\overline{z}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{w+z}{w-z}+1\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\overline{w}+\overline{z}}{\overline{w}-\overline{z}}-1\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{w+z}{w-z}+\frac{\overline{w}+\overline{z}}{\overline{w}-\overline{z}}\right)=\mathrm{Re}\left(\frac{w+z}{w-z}\right),$$

$$\frac{dw}{w}=id\varphi .$$

从而 $u(z)$是下列函数的实部：

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=\rho}u(w)\frac{w+z}{w-z}\frac{dw}{w} \quad (|z|<\rho). \tag{3.5}$$

上式中的积分称为希瓦尔兹积分．显然

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\left[\int_{|w|=\rho}\frac{u(w)}{w-z}dw+z\int_{|w|=\rho}\frac{u(w)}{w}\frac{dw}{w-z}\right].$$

括号中的两个积分都是所谓柯西型积分；可以象在柯西积分情形一样，证明它们都确定在 $|z|<\rho$ 内的解析函数(第三章，引理4.1)．由此可见，$f(z)$是在 $|z|<\rho$ 内的解析函数，从而其实部 $u(z)$ 是在同一圆盘内的调和函数．

(3) 对于 $u(\zeta)(|\zeta|=\rho)$的任何连续点 $\zeta_0=\rho e^{i\varphi_0}$,

$$\lim_{z\to\zeta_0}u(z)=u(\zeta_0)\ (|z|<\rho). \tag{3.6}$$

由(3.1)及(3.3)，我们有

$$u(z)-u(\zeta_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[u(\rho e^{i\varphi})-u(\rho e^{i\varphi_0})]\frac{(\rho^2-r^2)d\varphi}{\rho^2-2\rho r\cos(\varphi-\theta)+r^2}$$

$$(z=re^{i\theta},\ 0\leqslant r<\rho,\ 0\leqslant\theta<2\pi). \qquad (3.7)$$

由假设，任给 $\varepsilon>0$，可找到 $\delta>0$，使当 $|\varphi-\varphi_0|\leqslant\delta$ 时，

$$|u(\rho e^{i\varphi})-u(\rho e^{i\varphi_0})|<\varepsilon. \qquad (3.8)$$

把(3.7)中积分分成两部分：

$$u(z)-u(\zeta_0)$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(\int_{|\varphi-\varphi_0|\leqslant\delta}+\int_{|\varphi-\varphi_0|>\delta}\right)\frac{(\rho^2-r^2)d\varphi}{\rho^2-2\rho r\cos(\varphi-\theta)+r^2}$$

$$=I_1+I_2. \qquad (3.9)$$

由(3.8)，(3.2)及(3.3)．

$$|I_1|<\frac{\varepsilon}{2\pi}\int_{|\varphi-\varphi_0|\leqslant\delta}\frac{(\rho^2-r^2)d\varphi}{\rho^2-2\rho r\cos(\varphi-\theta)+r^2}$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\rho^2-r^2}{\rho^2-2\rho r\cos(\varphi-\theta)+r^2}=\varepsilon. \qquad (3.10)$$

现研究 I_2. 由(3.4)，

$$|I_2|<\frac{1}{2\pi}\int_{|\varphi-\varphi_0|>\delta}2M\cdot\frac{(\rho^2-r^2)d\varphi}{\rho^2-2\rho r\cos(\varphi-\theta)+r^2}.$$

当 $z\to\zeta_0$，亦即 $r\to\rho$，$\theta\to\varphi_0$ 时，

$$\rho^2-2\rho r\cos(\varphi-\theta)+r^2\to2\rho^2[1-\cos(\varphi-\varphi_0)],$$

$$\rho^2-r^2\to0.$$

但当 $|\varphi-\varphi_0|>\delta$ 时，

$$2\rho^2[1-\cos(\varphi-\varphi_0)]>2\rho^2(1-\cos\delta)>0.$$

因此对于 $\varepsilon>0$，可找到 $\delta_1>0$，使 $|z-\zeta_0|<\delta_1$，$|z|<\rho$ 时，$|I_2|<\varepsilon$. 由此结合(3.10)及(3.9)，(3.6)得证.

这样，我们证明了(3.1)确是 $|z|\leqslant\rho$ 上狄里克莱问题的解.

4. 上半平面上的狄里克莱问题 上半平面上的狄里克莱问题是：

设在实轴上给出一个函数 $u(t)(-\infty<t<+\infty)$，除去在有限个点 $t_1, t_2, \cdots, t_n$ 外，这函数处处连续，而在这些例外点，$u(t)$ 有第一类间断点；此外，$\lim\limits_{t\to+\infty} u(t)$ 及 $\lim\limits_{t\to-\infty} u(t)$ 存在并且是有限数. 需要求出在上半平面内的有界调和函数 $u(z)$，使其在实轴上的非例外点 t 取值 $u(t)$，亦即使

$$\lim_{z\to t} u(z)=u(t) \qquad (\mathrm{Im}\, z>0).$$

我们应用上段中的结果以及保形映射解决这一问题. 在上半 Z 平面取定一点 z，作分式线性函数

$$w=\rho\,\frac{Z-z}{Z-\bar{z}} \qquad (0<\rho<+\infty). \tag{4.1}$$

它把 Z 平面上的点 z 及 $\bar{z}$ 分别映射成 w 平面上的原点和无穷远点，把实轴 $\mathrm{Im}\, Z=0$ 映射成 $|w|=\rho$. 通过这一映射，$u(t)$ 变成了 $|\zeta|=\rho$ 上的函数

$$u_1(\zeta)=u\left(\frac{\bar{z}\zeta-\rho z}{\zeta-\rho}\right);$$

它在 $|\zeta|=\rho$ 上除了有有限个第一类间断点外，处处连续. 应用上段的结果，可以作出在 $|w|<\rho$ 内的有界调和函数 $u_1(w)$，使其在 $|\zeta|=\rho$ 的非例外点 ζ 取值 $u_1(\zeta)$.

由此可见，

$$u(Z)=u_1\left(\rho\,\frac{Z-z}{Z-\bar{z}}\right)$$

是在上半平面内的调和函数，且其在实轴上的非例外点 t 取值 $u(t)$.

现求 $u(z)$的表示式．由(3.1)，我们有

$$u_1(0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u_1(\rho e^{i\varphi})d\varphi, \qquad (4.2)$$

其中

$$\rho e^{i\varphi}=\rho\ \frac{t-z}{t-\overline{z}},$$

$$u_1(0)=u(z),\ u_1(\rho\, e^{i\varphi})=u(t). \qquad (4.3)$$

于是

$$e^{i\varphi}=\frac{t-z}{t-\overline{z}}.$$

在上式两边取对数，然后求微分，即得

$$d\varphi=\left(\frac{1}{t-z}-\frac{1}{t-\overline{z}}\right)dt=\frac{2ydt}{(t-x)^2+y^2}\quad (z=x+iy). \qquad (4.4)$$

把(4.3)及(4.4)代入(4.2)，我们有

$$u(z)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}u(t)\frac{ydt}{(t-x)^2+y^2}$$

$$(z=x+iy,y>0); \qquad (4.5)$$

这就是上半平面的普阿松积分，正是我们所要求出的解．

由于

$$\frac{y}{(t-x)^2+y^2}=\mathrm{Re}\,\frac{1}{i(t-z)},$$

这时的希瓦尔兹积分是

$$f(z)=\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{u(t)dt}{t-z};\qquad(4.6)$$

它也称为希尔伯特积分．要这积分收敛，只设 $u(t)$ 有界还不够，还要假定当 $|t|\to\infty$ 时，函数具有某些性质，例如 $u(t)$ 趋于 0 的速度不慢于 $\frac{1}{|t^{\alpha}|}$ $(\alpha>0)$．

例　求在上半平面内调和的函数，使其在实轴的一段线段 (α,β) 上取值 1，而在实轴上其余各点取值 0．

由(4.5)，所求的函数是

$$u(z)=\frac{1}{\pi}\int_{\alpha}^{\beta}\frac{y\,dt}{(t-x)^2+y^2}=\frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{\beta-x}{y}-\operatorname{arc\,tg}\frac{\alpha-x}{y}\right)$$

$$(z=x+iy,\ y>0).$$

如果引进由 $z-\alpha$ 与 $z-\beta$ 这两向量与 x 轴所夹两角 φ_{α} 与 φ_{β} 便可以写成

$$u(z)=\frac{\varphi_{\beta}-\varphi_{\alpha}}{\pi}=\frac{\omega}{\pi}$$

(图 53)．因此，函数 $u(z)$ 等于由点对线段 (α,β) 的视角被 π 除．在这里希瓦尔兹公式也适用，由这公式得

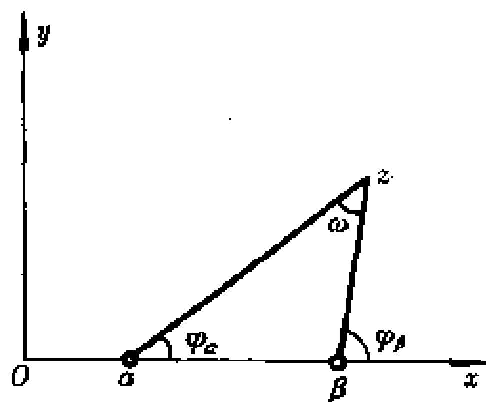


图 53

$$f(z)=\frac{1}{\pi i}\int_{\alpha}^{\beta}\frac{dt}{t-z}$$

$$=\frac{1}{\pi i}\operatorname{Ln}\frac{\beta-z}{\alpha-z}.$$

习 题 八

1．设函数$f(z)$在区域D内解析，而且不等于零．直接计算证明：在D内，$\Delta \ln|f(z)|=0$，$\Delta|f(z)|>0$．

2．求一解析函数，使其实部为$e^x(x\cos y-y\sin y)$．

3．试求形如$ax^3+bx^2y+cxy^2+dy^3$的最一般的调和函数，其中a,b,c及d是实常数．

4．设实变数实值函数$u(x,y)$是在$0<|z|<\rho\ (<+\infty)$内的有界调和函数，证明适当定义$u(0,0)$后，$u(x,y)$是在$|z|<\rho$内的调和函数．

5．试用调和函数的中值公式，证明

$$\int_0^\pi \ln(1-2r\cos\theta+r^2)d\theta=0,$$

其中$-1<r<1$．

6．证明：如果在整个z平面调和的函数$u(z)$是有界的，那么$u(z)$恒等于常数．

7．试求在单位圆盘内的调和函数，使其在单位圆的一段弧上取值1，而在圆上其余部分取值0．

8．试求在上半平面内的调和函数$u(z)$，使其在实轴上取值如下：

$$u(t)=\begin{cases}0, & \text{当 } t<-1 \text{ 时},\\ v, & \text{当 } -1<t<0 \text{ 时},\\ (v_2-v_1)t+v_1, & \text{当 } 0<t<1 \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } t>1 \text{ 时}.\end{cases}$$

9．(1)设$f(z)$在$|z|\leqslant\rho$上解析，并且没有零点，那么当$z=re^{i\theta}$，$0\leqslant r<\rho$时，

$$\ln|f(z)|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|f(\rho e^{i\varphi})|\frac{(\rho^2-r^2)d\varphi}{\rho^2-2\rho r\cos(\varphi-\theta)+r^2},$$

这里对数取实数值．

(2) 设 $f(z)$ 在 $|z|\leqslant\rho$ 上亚纯，并且有零点 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 与极点 $b_1, b_2, \cdots, b_n$，其中零点与极点都在 $|z|<\rho$ 内，并且各按其是几阶在上列两有限序列中各出现几次．当 $z=re^{i\theta}$，$0\leqslant r<\rho$，并且 $z\neq a_j$ 及 b_k 时 $(j=1,2,\cdots,m, k=1,2,\cdots,n)$，

$$\ln|f(z)|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|f(\rho e^{i\varphi})|\frac{(\rho^2-r^2)d\varphi}{\rho^2-2\rho r\cos(\varphi-\theta)+r^2}$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\ln\left|\frac{\rho(a_j-z)}{\rho^2-a_j\bar{z}}\right|-\sum_{k=1}^{n}\ln\left|\frac{\rho(b_k-z)}{\rho^2-b_k\bar{z}}\right|,$$

这里对数取实数值．

上列公式称为普阿松－詹森公式，或称为奈望林纳公式．它在亚纯函数的研究中起着关键性的作用．

10．设实数值函数 $u(z)$ 在 $|z|\leqslant1$ 上连续，在 $|z|<1$ 内调和，证明

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}u(e^{it})dt$$

在 $|z|<1$ 内解析，并且在 $|z|<1$ 内，$\mathrm{Re}f(z)=u(z)$．

11．设复数值函数 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 内解析，在 $|z|\leqslant1$ 上连续，证明在 $|z|<1$ 内，

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{Re}\left(\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\right)f(e^{it})dt.$$

12．设 $u(z)$ 是在区域 D 内的正调和函数，并且设 $|z-z_0|\leqslant\rho$ 是 D 内任一闭圆盘．

(1) 证明当 $|z-z_0|\leqslant\rho$ 时，

$$\frac{\rho-|z-z_0|}{\rho+|z-z_0|}u(z_0)\leqslant u(z)\leqslant\frac{\rho+|z-z_0|}{\rho-|z-z_0|}u(z_0).$$

(2) 证明当 $|z-z_0|<\rho$ 时，

$$\frac{-2|z-z_0|u(z_0)}{\rho+|z-z_0|} \leqslant u(z)-u(z_0) \leqslant \frac{2|z-z_0|u(z_0)}{\rho-|z-z_0|} .$$

由此导出

$$\left|\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}\right|_{z=z_0} \leqslant \frac{2u(z_0)}{\rho} .$$

(3) 当 $D=\mathbb{C}$ 时，$u(z)$ 恒等于一常数.

*第九章　多复变函数

§1. 初 步 性 质

1.解析函数·柯西公式　在本章中，我们介绍多复变解析函数的一些初步性质．多复变函数是当前正在深入研究的一个课题．对于它，还没有形成像单复变函数那样系统、完备的理论．由于它在物理学及数学其他分支如偏微分方程、调和分析及数论等方面的应用，对它的研究愈来愈显示其重要性．多复变函数论不是单复变函数论的直接推广，其本身具有许多新的特点，并且涉及许多新的问题．请参看中国大百科全书，数学，第145—150页．

为了避免复杂的记号，本章仅限于讨论两个复变数的函数；但有关讨论不难转移到任意有限个复变数情形．

考虑集

$$\mathbb{C}^2=\{(z_1,z_2)\,|\,z_1 \text{ 及 } z_2\in\mathbb{C}\}.$$

设 $(\alpha_1,\alpha_2)\in\mathbb{C}^2$，$r\in(0,+\infty)$．集

$$B(\alpha_1,\alpha_2;r)=\left\{(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2\,\middle|\,\sqrt{|z_1-\alpha_1|^2+|z_2-\alpha_2|^2}<r\right\}$$

及

$$P(\alpha_1,\alpha_2;r)=\{(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2\,|\,|z_1-\alpha_1|<r \text{ 及 } |z_2-\alpha_2|<r\}$$

分别称为以(α_1,α_2)为中心，r为半径的开球及开双圆盘，或者称为(α_1,α_2)的邻域或r邻域．

有了邻域，就可与第一章§2中一样．定义$\mathbb{C}^2$集中的聚点、内点、边界点、孤立点以及开集、闭集、有界集、区域等．由于

$$P(\alpha_1,\alpha_2:r/\sqrt{2})\subset B(\alpha_1,\alpha_2;r)\subset P(\alpha_1,\alpha_2;r),$$

无论取 $B(\alpha_1,\alpha_2;r)$ 或 $P(\alpha_1,\alpha_2;r)$作为邻域，所得上述各项的定义都是一致的．我们也可定义$\mathbb{C}^2$中的连续曲线为连续映射[0,1]

$\to \mathbb{C}^2$.

两复变函数是从 $\mathbb{C}^2$ 中一个集 E 到 $\mathbb{C}$ 的映射 $w=f(z_1, z_2)$. 与单复变数函数情形一样，也可根据一点的邻域定义极限、连续性、一致连续性等等.

现在引进两复变解析函数的定义，设 $f(z_1, z_2)$ 是在区域 D ($\subset \mathbb{C}^2$) 内确定的单复值函数，并且设 $(z_1^0, z_2^0) \in D$, $(z_1^{(0)}+\Delta z_1, z_2^{(0)}+\Delta z_2) \in D$. 如果

$$f(z_1^{(0)}+\Delta z_1, z_2^{(0)}+\Delta z_2) - f(z_1^{(0)}, z_2^{(0)})$$

$$=\alpha_1 \Delta z_1 + \alpha_2 \Delta z_2 + o\left(\sqrt{|\Delta z_1|^2+|\Delta z_2|^2}\right)$$

$$\left(\sqrt{|\Delta z_1|^2+|\Delta z_2|^2} \to 0\right),$$

其中 α_1 及 α_2 是复常数，那么我们说 $f(z_1, z_2)$ 在 $(z_1^{(0)}, z_2^{(0)})$ 可微.

有了两复变函数可微的定义，第二章第 2 段中单复变函数解析的定义就可逐字逐句转移到两复变函数；也可引用"全纯"等术语.

由这一定义可见：如果 $f(z_1, z_2)$ 在 D 内有连续的偏导数 $\dfrac{\partial f}{\partial z_1}$ 及 $\dfrac{\partial f}{\partial z_2}$，那么 $f(z_1, z_2)$ 在 D 内解析. 因此，多项式就是 $\mathbb{C}^2$ 上的解析函数，称为 $\mathbb{C}^2$ 上的一个整函数.

设 $f(z_1, z_2)$ 在区域 D 内解析. 由上述定义，这函数在 D 内连续，并且有一阶偏导数，即分别对 z_1 及 z_2 解析(第二章)；我们也可把这一论断作为解析函数的定义. 由以下 §2 中哈托格斯定理，在这定义中还可除去函数在 D 内连续这一条件.

与第二章第 3 段中一样，可以导出两复变函数可微及解析的柯西 – 黎曼条件.

定理 1.1 设函数 $f(z_1, z_2)=u(x_1, y_1, x_2, y_2)+iv(x_1, y_1, x_2, y_2)$ 在区域 D ($\subset \mathbb{C}^2$) 内确定，其中 $x_k=\mathrm{Re}\, z_k$, $y_k=\mathrm{Im}\, z_k$ $(k=1, 2)$, $u(x_1, y_1, x_2, y_2)=\mathrm{Re} f(z_1, z_2)$, $v(x_1, y_1,$

$x_2, y_2) = \operatorname{Im} f(z_1, z_2)$，那么 $f(z_1, z_2)$在点(z_1, z_2)可微的必要与充分条件是：在点(z_1, z_2)，$u(x_1, y_1, x_2, y_2)$及$v(x_1, y_1, x_2, y_2)$可微，并且

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} = \frac{\partial v}{\partial y_k}, \quad \frac{\partial u}{\partial y_k} = -\frac{\partial v}{\partial x_k}. \quad (k=1,2). \qquad (1.1)$$

定理 1.3 设函数$f(z_1, z_2) = u(x_1, y_1, x_2, y_2) + iv(x_1, y_1, x_2, y_2)$在区域 $D(\subset \mathbb{C}^2)$内确定，$f(z_1, z_2)$在区域 D 内解析的必要与充分条件是：$u(x_1, y_1, x_2, y_2)$及 $v(x_1, y_1, x_2, y_2)$在 D 内可微，而且在 D 内(1.1)成立.

条件(1.1)一般称为柯西－黎曼条件.

上面已经讲到，在两复变数解析函数中，适当确定一个复变数，这函数就成为另一复变数在适当区域内的解析函数. 由柯西－黎曼条件也可看出这一点.

柯西定理可以推广到两复变及多复变情形，但情况比较复杂. 现在我们在比较简单的情况下证明柯西公式如下：

定理 1.3 设D是 $\mathbb{C}^2$ 中的一个区域，$f(z_1, z_2)$在 D 内解析. 设$(\alpha_1, \alpha_2) \in D$，$\rho_1$及$\rho_2 > 0$，并且双圆盘

$$P(\alpha_1, \alpha_2; \rho_1, \rho_2) = \{(z_1, z_2) \mid |z_k - \alpha_k| < \rho_k (k=1,2)\}$$

的闭包$\subset D$. 设$C = C(\alpha_1, \alpha_2; \rho_1, \rho_2) = \{(z_1, z_2) \mid |z_k - \alpha_k| = \rho_k (k=1,2)\}$，那么，$\forall (z_1, z_2) \in P(\alpha_1, \alpha_2; \rho_1, \rho_2)$，

$$f(z_1, z_2) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \iint_C \frac{f(\zeta_1, \zeta_2) d\zeta_1 d\zeta_2}{(\zeta_1 - z_1)(\zeta_2 - z_2)}$$

$$= \int_{|\zeta_1 - \alpha_1| = \rho_1} \frac{d\zeta_1}{\zeta_1 - z_1} \int_{|\zeta_2 - \alpha_2| = \rho_2} \frac{f(\zeta_1, \zeta_2) d\zeta_2}{\zeta_2 - z_2}[1], \quad (1.2)$$

---

[1] 把 $|\zeta_k - \alpha_k| = \rho_k$ 表示为 $\zeta_k = \alpha_k + \rho_k e^{i\theta_k}$. 定义

$$\iint_C \frac{f(\zeta_1, \zeta_2) d\zeta_1 d\zeta_2}{(\zeta_1 - z_1)(\zeta_2 - z_2)}$$ (下转下页脚注)

$$\exists \frac{\partial^{m+n} f(z_1, z_2)}{\partial z_1^m \partial z_2^n} = \frac{m!\, n!}{(2\pi i)^2} \iint_C \frac{f(\zeta_1, \zeta_2)\, d\zeta_1\, d\zeta_2}{(\zeta_1 - z_1)^{m+1} (\zeta_2 - z_2)^{n+1}}$$

$$= \int_{|\zeta_1 - \alpha_1| = \rho_1} \frac{d\zeta_1}{(\zeta_1 - z_1)^{m+1}} \int_{|\zeta_2 - \alpha_2| = \rho_2} \frac{f(\zeta_1, \zeta_2) d\zeta_2}{(\zeta_2 - z_2)^{n+1}}, \quad (1.3)$$

这里的曲线积分都是沿反时针方向取的．

证 取定 z_1 满足 $|z_1 - \alpha_1| \leqslant \rho_1$．在 $|z_2 - \alpha_2| \leqslant \rho_2$ 上，函数 $f(z_1, z_2)$ 对 z_2 解析．于是当 $|z_2 - \alpha_2| < \rho_2$ 时，关于对 z_2 解析的这一函数，我们有

$$f(z_1, z_2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta_2 - \alpha_2| = \rho_2} \frac{f(z_1, \zeta_2)\, d\zeta_2}{\zeta_2 - z_2} \quad (1.4)$$

及

$$\frac{\partial^n f(z_1, z_2)}{\partial z_2^n} = \frac{n!}{2\pi i} \int_{|\zeta_2 - \alpha_2| = \rho_2} \frac{f(z_1, \zeta_2)\, d\zeta_2}{(\zeta_2 - z_2)^{n+1}}. \quad (1.5)$$

取定 z_2 满足 $|z_2 - \alpha_2| < \rho_2$．在 $|z_1 - \alpha_1| \leqslant \rho_1$ 上，函数 $f(z_1, z_2)$ 及 $\frac{\partial^n f(z_1, z_2)}{\partial z_2^n}$ 对 z_1 解析．$f(z_1, z_2)$ 对 z_1 的解析性是明显的；至于 $\frac{\partial^n f(z_1, z_2)}{\partial z_2^n}$ 对 z_1 的解析性，则可由下式导出：

（* 上接上页脚注）为

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\alpha_1 + \rho_1 e^{i\theta_1}, \alpha_2 + \rho_2 e^{i\theta_2}) \rho_1 \rho_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}\, d\theta_1\, d\theta_2}{(\alpha_1 + \rho_1 e^{i\theta_1} - z_1)(\alpha_2 + \rho_2 e^{i\theta_2} - z_2)},$$

其实部及虚部都是两实变连续函数的二重积分．它们显然可化为重复积分如(1.2)、(1.3)中积分的意义仿此．

$$\left[\frac{\partial^n f(z_1+\Delta z_1,z_2)}{\partial z_2^n}-\frac{\partial^n f(z_1,z_2)}{\partial z_2^n}\right]\frac{1}{\Delta z_1}$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta_2-\alpha_2|=\rho_2}\frac{[f(z_1+\Delta z_1,\zeta_2)-f(z_1,\zeta_2)]}{\Delta z_1}\cdot\frac{d\zeta_2}{(\zeta_2-z_2)^{n+1}}$$

因此当 $|z_1-\alpha_1|<\rho_1$ 时，关于对 z_1 解析的上述函数，我们有

$$f(z_1,z_2)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta_1-\alpha_1|=\rho_1}\frac{f(\zeta_1,z_2)d\zeta_1}{\zeta_1-z_1}\qquad(1.6)$$

及

$$\frac{\partial^{m+n}f(z_1,z_2)}{\partial z_1^m\partial z_2^n}=\frac{m!}{2\pi i}\int_{|\zeta_1-\alpha_1|=\rho_1}\frac{\partial^n f(\zeta_1,z_2)}{\partial z_2^n}\cdot\frac{d\zeta_1}{(\zeta_1-z_1)^{m+1}}.\qquad(1.7)$$

结合(1.4)与(1.6)以及(1.5)与(1.7)，就分别得到(1.2)及(1.3).

由定理1.3可立即推出：

系 1.1　在定理1.3的假设下，我们有柯西不等式： $\forall(z_1,z_2)\in P(\alpha_1,\alpha_2;\rho_1,\rho_2)$，

$$\left|\frac{\partial f^{m+n}(z_1,z_2)}{\partial z_1^m\partial z_2^n}\right|\leqslant\frac{m!\,n!\,M}{\rho_1^m\rho_2^n}\quad(m,n=0,1,2,\cdots).\qquad(1.8)$$

其中 $M=\max\{|f(z_1,z_2)|\,\big|\,|z_k-\alpha_k|=\rho_k,(k=1,2)\}$.

系 1.2　设 $f(z_1,z_2)$**在区域** $D(\subset\mathbb{C}^2)$ **内解析，那么** $f(z_1,z_2)$ **在** D **内有任意阶偏导数.**

从柯西公式(1.2)中，已可看出两复变与单复变情形的一个

重要区别．我们知道，

$$\partial P(\alpha_1,\alpha_2;\rho_1,\rho_2)=\{(z_1,z_2)\,|\,|z_k-\alpha_k|=\rho_k\ (k=1,2)\}$$

$$\bigcup\{(z_1,z_2)\,|\,|z_1-\alpha_1|=\rho_1,|z_2-\alpha_2|<\rho_2\}$$

$$\bigcup\{(z_1,z_2)\,|\,|z_1-\alpha_1|<\rho_1,|z_2-\alpha_2|=\rho_2\}.$$

由(1.2)，$f(z_1,z_2)$在区域 $P(\alpha_1,\alpha_2;\rho_1,\rho_2)$内任一点所取的值，可以只用一部分边界上的值表示出来，与单复变情形不相类似．

2．数项与函数项级数　二重复数项序列就是

$$\{\sigma_{mn}\}\subset\mathbb{C}\quad(m,n=1,2,3,\cdots).$$

设 $\sigma\in\mathbb{C}$．如果 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbb{N}$，使得 $\forall m$ 及 $n>N$，

$$|\sigma_{mn}-\sigma|<\varepsilon,$$

那么我们说$\{\sigma_{mn}\}$有极限 σ，或者说$\{\sigma_{mn}\}$是收敛二重序列，并且收敛于 σ，记作

$$\lim_{m,n\to+\infty}\sigma_{mn}=\sigma. \tag{2.1}$$

如果序列$\{\sigma_{mn}\}$不收敛，则称$\{\sigma_{mn}\}$发散，或者说它是发散二重序列．

关于两个收敛复数序列相应项之和、差、积、商所成序列的结果，也可推广到二重复数序列．

(2.1)称为$\{\sigma_{mn}\}$的二重极限．对这序列还可引进二次极限 $\lim\limits_{m\to+\infty}\lim\limits_{n\to+\infty}\sigma_{mn}$ 及 $\lim\limits_{n\to+\infty}\lim\limits_{m\to+\infty}\sigma_{mn}$，当然，这两极限也不一定存在．

设$\{\alpha_{jk}\}\subset\mathbb{C}$　$(j,k=1,2,3,\cdots)$．二重复数项级数就是

$$\sum_{j,k=1}^{+\infty} \alpha_{jk}. \tag{2.2}$$

与这级数相对应，作二重序列$\{\sigma_{mn}\}$，其中

$$\sigma_{mn}=\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\alpha_{jk} \quad (m,n=1,2,3,\cdots). \tag{2.3}$$

如果这序列收敛，那么我们说级数(2.2)收敛．如果序列$\{\sigma_{mn}\}$的极限是σ，那么我们说级数(2.2)的和是σ，或者说这级数收敛于σ，记作

$$\sum_{j,k=1}^{+\infty}\alpha_{jk}=\sigma.$$

如果序列$\{\sigma_{mn}\}$发散，那么我们说级数(2.2)发散．

不难按$\varepsilon-N$的说法叙述二重级数收敛的定义．

由(2.3)，当m及$n>1$时，

$$\alpha_{mn}=\sigma_{mn}+\sigma_{m-1,n-1}-\sigma_{m,n-1}-\sigma_{m-1,n}.$$

因此当级数(2.2)收敛时，

$$\lim_{m,n\to+\infty}\alpha_{mn}=0. \tag{2.4}$$

关于收敛复数项级数各项乘以同一常数，以及关于两个收敛复数项级数的和与差的结果，都可推广到二重级数情形．

柯西收敛原理可推广如下：

级数(2.2)**收敛的必要与充分条件是**：$\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbb{N}$，**使得** $\forall m$及$n>N$，p及$q=1,2,3,\cdots$，

$$\left|\sum_{j=m+1}^{m+p}\sum_{k=n+1}^{n+q}\alpha_{jk}+\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=n+1}^{n+q}\alpha_{jk}+\sum_{j=m+1}^{m+p}\sum_{k=1}^{n}\alpha_{jk}\right|<\varepsilon. \tag{2.5}$$

证明与一般级数情形相似：先就$\alpha_{jk}\in\mathbb{R}$时求证，然后导出$\alpha_{jk}\in\mathbb{C}$时的相应结果．

现对级数(2.2)引进绝对收敛概念. 如果级数

$$\sum_{j,k=1}^{+\infty} |\alpha_{jk}| \tag{2.6}$$

收敛，那么级数(2.2)称为绝对收敛.

由柯西收敛原理，如果级数(2.2)绝对收敛，那么它一定收敛.

关于绝对收敛级数，有下列结果：

如果级数(2.2)绝对收敛，那么

$$\sum_{j,k=1}^{+\infty} \alpha_{jk} = \sum_{j=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_{jk} = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} \alpha_{jk} \tag{2.7}$$

$$= \sum_{n=2}^{+\infty} \sum_{k+j=n} \alpha_{jk}. \tag{2.7'}$$

如果级数(2.2)绝对收敛，那么级数各项实部及虚部分别构成的级数绝对收敛. 因此只须证明(2.7)及(2.7′)在 $\alpha_{jk} \in \mathbb{R}$ 时成立. 又因当 $\alpha_{jk} \in \mathbb{R}$ 时，它们分别可以写成两个非负数的差：

$$\alpha_{jk} = \frac{1}{2}(|\alpha_{jk}| + \alpha_{jk}) - \frac{1}{2}(|\alpha_{jk}| - \alpha_{jk}),$$

所以只须对于 $\alpha_{jk} \geqslant 0$ 情形证明(2.7)及(2.7′).

现设 $\alpha_{jk} \geqslant 0$，并且设级数(2.2)的和是 σ. 先证明(2.7). 由于 $\forall m$ 及 $n > 1$，$\sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk} \leqslant \alpha$，$\sum_{j=1}^{m} \alpha_{jk} \leqslant \alpha$，可见 $\forall j \geqslant 1$，$\sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_{jk}$ 收敛；$\forall k \geqslant 1$，$\sum_{j=1}^{+\infty} \alpha_{jk}$ 收敛. 由二重级数收敛的定义及柯西收敛原理，$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N > 0$，使得 $\forall m$ 及 $n > N$，p 及 $q = 1, 2, 3, \cdots$，我们有

$$\left| \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk} - \sigma \right| < \varepsilon \tag{2.8}$$

以及 (2.5); 由于 $\alpha_{jk} \geqslant 0$, 这时有

$$\left|\sum_{j=1}^{m} \sum_{k=n+1}^{n+q} \alpha_{jk}\right| < \varepsilon, \left|\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=m+1}^{m+p} \alpha_{jk}\right| < \varepsilon.$$

在上式中令 p 及 $q \to +\infty$, 就有

$$\left|\sum_{j=1}^{m} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \alpha_{jk}\right| \leqslant \varepsilon, \quad \left|\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=m+1}^{+\infty} \alpha_{jk}\right| \leqslant \varepsilon. \qquad (2.9)$$

由 (2.8) 及 (2.9), 当 m 及 $n > N$ 时,

$$\left|\sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_{jk} - \sigma\right| \leqslant \left|\sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk} - \sigma\right| + \left|\sum_{j=1}^{m} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \alpha_{jk}\right|$$

$$< \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

于是 (2.7) 中第一个等式得证; 同样证明第二个等式.

为了在 $\alpha_{jk} \geqslant 0$ 情形下证明 (2.7′), 只须注意当 $n \geqslant 2$ 时,

$$\sum_{j=1}^{[n/2]} \sum_{k=1}^{[n/2]} \alpha_{jk} \leqslant \sum_{p=2}^{n} \sum_{j+k=p} \alpha_{jk} \leqslant \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_{jk},$$

其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.

我们可以证明: 在 $\alpha_{jk} \geqslant 0$ 情形下, 如果 (2.7) 及 (2.7′) 中任意一个级数收敛, 那么其余三个级数一定收敛, 并且等式成立. 因此在 $\alpha_{jk} \in \mathbb{C}$ 情形下, 如果 (2.7) 及 (2.7′) 中任意一个级数绝对收敛, 那么其余三个级数一定绝对收敛, 并且等式成立.

设函数 $f_{jk}: E(\subset \mathbb{C}^2) \to \mathbb{C}$ $(j, k = 1, 2, 3, \cdots)$. 显然可以给出二重函数项级数

$$\sum_{j,k=1}^{+\infty} f_{jk}(z_1, z_2) \qquad (2.10)$$

在 E 上收敛及一致收敛的定义, 并且可以证明:

如果二重正项级数

$$\sum_{j,k=1}^{+\infty} a_{jk}$$

收敛，并且 $\forall(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2,\forall j$ 及 $k\in\{1,2,3,\cdots\}$,

$$|f_{jk}(z_1,z_2)|\leqslant a_{jk},$$

那么级数(2.10)在 E 上一致绝对收敛．

与单变数情形同样证明：设函数 $f_{jk}(z_1,z_2)$在区域或闭区域 $E(\subset\mathbb{C}^2)$ 上连续，并且(2.10)在E 上一致收敛，那么和函数在 E上连续．也可同样证明关于函数项级数逐项积分的定理．

3．幂级数与幂级数展式 现研究一类特殊的二重解析函数项级数即二重幂级数，或称为二重泰勒级数

$$\sum_{j,k=0}^{+\infty} \alpha_{jk}(z_1-z_1^{(0)})^j(z_2-z_2^{(0)})^k, \tag{3.1}$$

其中复变数$(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2$，$z_1^{(0)}$，$z_2^{(0)}$，α_{jk} 是复常数．我们要证明，一般二重幂级数在一定的区域内收敛于一个两复变解析函数；另一方面，在 $\mathbb{C}^2$ 中一点解析(即在这点的一个邻域内解析)的两复变函数在这点的一个邻域内可以用二重幂级数表示出来：

先研究级数(3.1)的收敛性．为此，引进下列阿贝尔定理：

定理 3.1 如果对于级数(3.1)，$\exists r_1'$，r_2'及 $M>0$(M 与 j,k 无关)，使得

$$|\alpha_{jk}|(r_1')^j(r_2')^k\leqslant M(j,k=0,1,2,\cdots), \tag{3.2}$$

并且如果正数 $r_1<r_1'$，正数 $r_2<r_2'$，那么在 $\overline{P}(z_1^0,z_2^0;r_1,r_2)=\{(z_1,z_2)\,|\,|z_1-z_1^{(0)}|\leqslant r_1,|z_2-z_2^{(0)}|\leqslant r_2\}$上，级数(3.1)一致绝对收敛．

证 当$(z_1,z_2)\in\overline{P}(z_1^{(0)},z_2^{(0)};r_1,r_2)$时，我们有

$$
\begin{aligned}
&|\alpha_{jk}(z_1-z_1^{(0)})^j(z_2-z_2^{(0)})^k| \\
&\quad\leqslant |\alpha_{jk}|(r_1')^j(r_2')^k\,\frac{|z_1-z_1^{(0)}|^j}{(r_1')^j}\cdot\frac{|z_2-z_2^{(0)}|^k}{(r_2')^k} \\
&\quad\leqslant M\left(\frac{r_1}{r_1'}\right)^j\left(\frac{r_2}{r_2'}\right)^k .
\end{aligned}
$$

正项级数

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j,k=0}^{+\infty} M\left(\frac{r_1}{r_1'}\right)^j\left(\frac{r_2}{r_2'}\right)^k \\
&\quad=\lim_{m,n\to+\infty}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} M\left(\frac{r_1}{r_1'}\right)^j\left(\frac{r_2}{r_2'}\right)^k \\
&\quad= M\frac{r_1'}{r_1'-r_1}\cdot\frac{r_2'}{r_2'-r_2} .
\end{aligned}
$$

因此$(z_1,z_2)\in\overline{P}(z_1^{(0)},\ z_2^{(0)};\ r_1,r_2)$时，级数(3.1)一致绝对收敛.

为了研究级数(3.1)的收敛性，作对应的实系数二重幂级数

$$
\sum_{j,k=0}^{+\infty}|\alpha_{jk}|r_1^j\,r_2^k , \tag{3.3}
$$

其中 r_1 及 r_2 是实变数.

用 Q_1 表示实平面上第一象限 $r_1\geqslant 0$，$r_2\geqslant 0$，并且令

$$
\Gamma=\{(r_1,r_2)\in Q_1\,|\,(3.3)\text{ 收敛}\}.
$$

用 Δ 表示 Γ 的所有内点构成的集.

设 t_1 及 t_2 是非负实常数. 用柯西 – 阿达马公式，可以从级数

$$
\sum_{j,k=0}^{+\infty}|\alpha_{jk}|t_1^j\,x_1^{j+k}\ \text{及}\ \sum_{j,k=0}^{+\infty}|\alpha_{jk}|t_2^k\,x_2^{j+k}
$$

确定射线 $r_2=t_1r_1$ 及 $r_1=t_2r_2\,(r_1,r_2\geqslant 0)$与 Γ 的交集. 显然，这交集或者只含一点(0,0)，或者是从(0,0)出发的一个线段.

关于级数(3.1)的收敛性,我们有:

定理 3.2 如果 $(r_1,r_2)\in\Delta$,那么对于 $|z_1-z_1^{(0)}|\leqslant r_1$,$|z_2-z_2^{(0)}|\leqslant r_2$,级数(3.1)一致绝对收敛.如果 $(|z_1-z_1^{(0)}|,|z_2-z_2^{(0)}|)\overline{\in}\ \overline{\Delta}=\Delta\bigcup\partial\Delta$,那么级数(3.1)发散.

证 如果 $(r_1,r_2)\in\Delta$,$\exists(r_1',r_2')\in\Delta$,使 $r_1<r_1'$,$r_2<r_2'$.于是 $\sum\limits_{j,k}|\alpha_{jk}|(r_1')^j(r_2')^k<+\infty$,从而 $\sum\limits_{j+k\geqslant n}|\alpha_{jk}|(r_1')^j(r_2')^k\to 0\ (n\to+\infty)$.因此(3.2)成立.由定理3.1,定理3.2 的第一部分得证.

对于第二部分,只须证明:如果对于 $z_1\neq z_1^{(0)}$,$z_2\neq z_2^{(0)}$,级数(3.1)收敛,那么 $(|z_1-z_1^{(0)}|,|z_2-z_2^{(0)}|)\in\overline{\Delta}$.

设 $z_2-z_2^{(0)}=te^{i\theta}(z_1-z_1^{(0)})$ $(t\geqslant 0,\theta\in\mathbb{R})$,并且我们设级数

$\sum\limits_{j,k}\alpha_{jk}(z_1-z_1^{(0)})^j(z_2-z_2^{(0)})^k=\sum\limits_{j,k}\alpha_{jk}t^k e^{ik\theta}(z_1-z_1^{(0)})^{j+k}$ 收敛.考虑 $\sum\limits_{j,k}|\alpha_{jk}|t^k r_1^{j+k}$.可见在实平面上点 $(|z_1-z_1^{(0)}|,|z_2-z_2^{(0)}|)=(|z_1-z_1^{(0)}|,t|z_1-z_1^{(0)}|)$的任何邻域内,有一点 (r_1',tr_1'),在该点

$$\sum|\alpha_{jk}|(r_1')^j(tr_1')^k<+\infty.$$

因此 $(|z_1-z_1^{(0)}|,|z_2-z_2^{(0)}|)\in\overline{\Delta}$.证完.

由定理 3.2,$\forall(r_1,r_2)\in\Delta$,在 $\overline{P}(z_1^{(0)},z_2^{(0)},r_1,r_2)$ 上,级数(3.1)一致绝对收敛,从而其和函数 $f(z_1,z_2)$ 在 $\overline{P}(z_1^{(0)},z_2^{(0)};r_1,r_2)$ 上连续.根据关于单复变的结果,适当固定 z_2,级数(3.1)可逐项对 z_1 求偏导数.可以看出,求导后所得级数的和函数 $\dfrac{\partial f}{\partial z_1}$ 在 $\overline{P}(z_1^{(0)},z_2^{(0)};r_1,r_2)$ 上连续.关于 $\dfrac{\partial f}{\partial z_2}$ 也有类似的结果.于是我们有:

定理 3.3 $\forall(r_1,r_2)\in\Delta$,级数(3.1)的和函数

$$f(z_1,z_2)=\sum_{j,k=0}^{+\infty}\alpha_{jk}(z_1-z_1^{(0)})^j(z_2-z_2^{(0)})^k \qquad (3.4)$$

在$\overline{P}(z_1^{(0)}, z_2^{(0)}; r_1, r_2)$上解析，并且 $\frac{\partial f}{\partial z_1}$ 及 $\frac{\partial f}{\partial z_2}$ 可由(3.4)中的级数逐项求偏导数而得.

二重幂级数在适当区域内表示解析函数. 相反地我们有：

定理 3.4 设函数$f(z_1, z_2)$在 $P(z_1^{(0)}, z_2^{(0)}; r_1, r_2)=\{(z_1, z_2) \mid |z_k - z_k^{(0)}| < r_k; k=1, 2\}$内解析，那么在 $P(z_1^{(0)}, z_2^{(0)}; r_1, r_2)$内，

$$f(z_1, z_2)=\sum_{j,k=0}^{+\infty}\left(\frac{\partial^{j+k} f}{\partial z_1^j \partial z_2^k}\right)_0 \frac{(z_1-z_1^{(0)})^j (z_2-z_2^{(0)})^k}{j!\,k!}, \quad (3.5)$$

其中

$$\left(\frac{\partial^{j+k} f}{\partial z_1^j \partial z_2^k}\right)_0=\left(\frac{\partial^{j+k} f(z_1, z_2)}{\partial z_1^j \partial z_2^k}\right)\Bigg|_{z_1=z_1^{(0)}, z_2=z_2^{(0)}},$$

$$\frac{\partial^{0+k} f}{\partial z_1^0 \ \partial z_2^k}=\frac{\partial^k f}{\partial z_2^k}, \quad 0!=1, 等等.$$

证 $\forall (z_1', z_2') \in P(z_1^{(0)}, z_2^{(0)}, r_1, r_2)$, $\exists r_k'$, 使得 $|z_k' - z_k^{(0)}| \leqslant r_k' < r_k (k=1, 2)$. 由于$f(z_1, z_2)$在 $\overline{P}(z_1^{(0)}, z_2^{(0)}; r_1', r_2')$上解析，应用定理 1.3，就有

$$f(z_1', z_2')=\frac{1}{(2\pi i)^2}\iint_C \frac{f(\zeta_1, \zeta_2) d\zeta_1 d\zeta_2}{(\zeta_1-z_1')(\zeta_2-z_2')}, \quad (3.6)$$

其中 $C=C(z_1^{(0)}, z_2^{(0)}; r_1', r_2')=\{(z_1, z_2) \mid |z_k - z_k^{(0)}| = r_k' (k=1, 2)\}$.

当$(\zeta_1, \zeta_2) \in C$ 时，$\left|\frac{z_k'-z_k^{(0)}}{\zeta_k - z_k^{(0)}}\right| = q_k < 1 \quad (k=1, 2)$. 因此这时

$$\frac{1}{(\zeta_1 - z_1')(\zeta_2 - z_2')}$$

$$= \frac{1}{(\zeta_1 - z_1^{(0)})(\zeta_2 - z_2^{(0)})} \frac{1}{\left(1 - \frac{z_1 - z_1^{(0)}}{\zeta_1 - z_1^{(0)}}\right)\left(1 - \frac{z_2 - z_2^{(0)}}{\zeta_2 - z_2^{(0)}}\right)}$$

$$= \sum_{j,k=0}^{+\infty} \frac{(\zeta_1 - z_1^{(0)})^j (\zeta_2 - z_2^{(0)})^k}{(\zeta_1 - z_1^{(0)})^{j+1} (\zeta_2 - z_2^{(0)})^{k+1}} .$$

上式右边的级数当 $(\zeta_1, \zeta_2) \in C$ 时一致收敛．把它代入(3.6)，逐项积分并应用定理 1.3．就得到(3.5)．

(3.5)称为 $f(z_1, z_2)$的二重泰勒级数或二重幂级数展式．

与单复变情形一样，结合定理 3.3 及 3.4，可见函数 $f(z_1, z_2)$在一点 $(z_1^{(0)}, z_2^{(0)})$解析的必要与充分条件是：在$(z_1^{(0)}, z_2^{(0)})$的某一邻域内，这函数有(3.1)形的二重幂级数展式．

在单复变情形，由解析函数的幂级数展式可导出零点的孤立性．可是在两复变情形却没有相应的结果，例如从简单的解析函数 $z_1 z_2$ 就可看出这一点．

§2．哈托格斯定理

4．奥斯古德定理 我们知道，在两复变解析函数中适当固定任一个复变数，这函数就成为另一复变数的解析函数．F．哈托格斯证明了有关逆定理成立．在此以前，F．奥斯古德在附加条件下证明了有关结论．在本段中，先证明奥斯古德定理，在下段中，再应用它证明哈托格斯定理．为简单起见，不妨对中心在(0，0)的双圆盘情形作出证明．

定理 4.1 **设函数 $f(z_1, z_2)$在双圆盘 $P(0, 0; \rho_1, \rho_2)(\rho_1, \rho_2 > 0)$内确定，并且满足下列条件：**

1) $\forall z_2^{(0)}$满足$|z_2^{(0)}|<\rho_2$，$f(z_1,z_2^{(0)})$在$|z_1|<\rho_1$内解析；

2) $\forall z_1^{(0)}$满足$|z_1^{(0)}|<\rho_1$，$f(z_1^{(0)},z_2)$在$|z_2|<\rho_2$内解析；

3) $f(z_1,z_2)$在$P(0,0;\rho_1,\rho_2)$内有界，亦即$\exists M\in(0,+\infty)$，使得$\forall(z_1,z_2)\in P(0,0;\rho_1,\rho_2)$，$|f(z_1,z_2)|\leqslant M$，那么$f(z_1,z_2)$是在$P(0,0;\rho_1,\rho_2)$内的两复变解析函数.

证 先证明$f(z_1,z_2)$在$P(0,0;\rho_1,\rho_2)$内连续. $\forall(z_1,z_2)\in P(0,0;\rho_1,\rho_2)$，可取$r_k>0$，使得$|z_k|<r_k<\rho_k\quad(k=1,2)$. 取$(z_1+\Delta z_1,z_2+\Delta z_2)\in P(0,0;r_1,r_2)$，我们有

$$
\begin{aligned}
f(z_1+\Delta z_1,z_2+\Delta z_2)-f(z_1,z_2)&=f(z_1+\Delta z_1,z_2+\Delta z_2)\\
&\quad-f(z_1+\Delta z_1,z_2)+f(z_1+\Delta z_1,z_2)-f(z_1,z_2)
\end{aligned}
$$

$$
=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta_2|=r_2}f(z_1+\Delta z_1,\zeta_2)\left[\frac{1}{\zeta_2-(z_2+\Delta z_2)}-\frac{1}{\zeta_2-z_2}\right]d\zeta_2
$$

$$
+\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta_1|=r_1}f(\zeta_1,z_2)\left[\frac{1}{\zeta_1-(z_1+\Delta z_1)}-\frac{1}{\zeta_1-z_1}\right]d\zeta_1.
$$

由此可导出：当Δz_1及$\Delta z_2\to0$时，上式$\to0$. 因此$f(z_1,z_2)$在$P(0,0;\rho_1,\rho_2)$中任何点(z_1,z_2)连续.

$\forall r_k\in(0,\rho_k)\ (k=1,2)$，令

$C=C(0,0;r_1,r_2)=\{(\zeta_1,\zeta_2)\,\big|\,|\zeta_k|=r_k\quad(k=1,2)\}$.

当$(z_1,z_2)\in P(0,0;r_1,r_2)$时，我们有下列等式：

$$
\iint_C\frac{f(\zeta_1,\zeta_2)d\zeta_1d\zeta_2}{(\zeta_1-z_1)(\zeta_2-z_2)}=\int_{|\zeta_1|=r_1}\frac{d\zeta_1}{\zeta_1-z_1}\int_{|\zeta_2|=r_2}\frac{f(\zeta_1,\zeta_2)d\zeta_2}{\zeta_2-z_2}
$$

$$
=(2\pi i)\int_{|\zeta_1|=r_1}\frac{f(\zeta_1,z_2)\,d\zeta_1}{\zeta_1-z_1}=(2\pi i)^2f(z_1,z_2).\quad(4.1)
$$

另一方面，$\forall(z_1,z_2)\in P(0,0;r_1,r_2)$，

$$\begin{aligned}
&\iint_C \frac{f(\zeta_1,\zeta_2)d\zeta_1 d\zeta_2}{(\zeta_1-z_1)(\zeta_2-z_2)}\\
&=\iint_C \frac{f(\zeta_1,\zeta_2)}{\zeta_1\zeta_2}\left(\sum_{j,k=0}^{+\infty}\left(\frac{z_1}{\zeta_1}\right)^j\left(\frac{z_2}{\zeta_2}\right)^k d\zeta_1 d\zeta_2\right.\\
&=\sum_{j,k=0}^{+\infty}\left(\iint_C \frac{f(\zeta_1,\zeta_2)d\zeta_1 d\zeta_2}{\zeta_1^{j+1}\zeta_2^{k+1}}\right)z_1^j z_2^k.
\end{aligned}\tag{4.2}$$

比较(4.1)及(4.2)，可见 $f(z_1,z_2)$在 $P(0,0;r_1,r_2)$内可展开成幂级数．由于 r_k 在 $(0,\rho_k)$ $(k=1,2)$内的任意性，定理 4.1 得证．

现在证明奥斯古德的另一定理．

定理 4.2　设函数$f(z_1,z_2)$在双圆盘 $P(0,0;\rho_1,\rho_2)(\rho_1,\rho_2>0)$内确定，并且满足定理 4.1 中的假设 1)及 2)，那么在包含于 $P(0,0;\rho_1,\rho_2)$中的一个区域内，$f(z_1,z_2)$是两复变解析函数．

证　$\forall z_2$满足 $|z_2|<\rho_2$，并且任意取定 $\rho_1'\in(0,\rho_1)$．令

$$\mathrm{F}_n=\{z_2\,|\,|z_2|<\rho_2,\ M(z_2)\leqslant n\}\ (n=1,2,\cdots),$$

其中

$$M(z_2)=\max_{|z_1|\leqslant\rho_1'}\{|f(z_1,z_2)|\};$$

不难看出：

a) $F_1\subset F_2\subset\cdots\subset F_n\subset\cdots$;

b) F_n 是一闭集；

c) $\bigcup_{n=1}^{+\infty}F_n=\{z_2\,|\,|z_2|<\rho_2\}$.

现证明 $\exists F_{n_0}$，其中包含一圆盘 τ 及其边界．假若不然，设闭圆盘 $\sigma\subset\{z_2\,|\,|z_2|<\rho_2\}$，那么存在闭圆盘 $\sigma_1\subset\sigma$，使得 $\sigma_1\bigcap F_1$

$=\varnothing$. 同样，存在闭圆盘 $\sigma_2 \subset \sigma_1$，使得 $\sigma_2 \cap F_2 = \varnothing$. 以此类推，我们得到一个闭圆盘序列 $\{\sigma_n\}$，其中 $\sigma_{n+1} \subset \sigma_n$，$\sigma_n \cap F_n = \varnothing$ $(n=1,2\cdots)$. 取 $z_2^{(n)} \in \sigma_n$；设 $z_2{}'$是序列 $\{z_2^{(n)}\}$ 的一个聚点. 于是 $z_2{}' \in \sigma_n$，从而 $z_2{}' \overline{\in} F_n$. 因此 $z_2{}' \overline{\in} \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} F_n$，即得一矛盾.

这样，我们证明了 $\exists F_{n_0}$，使得 F_{n_0} 包含一个圆盘 τ 及其边界，也就是 $\forall z_2 \in \tau$，$\forall z_1$ 满足 $|z_1| \leqslant \rho_1{}'$，$|f(z_1,z_2)| \leqslant n_0$. 于是函数 $f(z_1,z_2)$在双圆盘

$$\{(z_1,z_2) \mid |z_1| < \rho{}', z_2 \in \tau\}$$

内有界. 由定理 4.1，$f(z_1,z_2)$在这双圆盘内解析. 证完.

5. 哈托格斯定理 现在先证明两个引理，其中第一个引理的证明要用到“实变函数”课程中将要讲到的勒贝格测度和积分理论.

引理 5.1 设级数

$$f(z_1,z_2) = \sum_{k=0}^{+\infty} g_k(z_1) z_2^k \tag{5.1}$$

满足下列条件：

a) $g_k(z_1)$**在区域** $D(\subset \mathbb{C})$**内解析；**

b) **当** $z_2 = z_2{}'$ **时，级数**(5.1)**在** D **内收敛；**

c) **当** $z_2 = z_2^{(0)}(\neq 0)$ **时，级数**(5.1)**在** D **内一个圆盘** $|z_1 - z_1^{(0)}| < \rho$ **内一致收敛，**

那么当 z_2 **满足** $|z_2| < |z_2{}'|$ **时，级数**(5.1)**在** $|z_1 - z_1^{(0)}| < \rho_1$ **内一致收敛，其中** ρ_1 **是小于** ρ **的任何正数.**

证 为简单起见，不失一般性，可设 $z_1{}' = 0$. 令 $|z_2^{(0)}| = b$，$|z_2{}'| = B$. 先证引理中的结论在 $|z_2| < b$ 时成立. 由 c)，$\forall \varepsilon > 0$，

$\exists N>0$，使得 $\forall n>N$，当 $|z_1|<\rho$ 时，

$$\left|\sum_{k=n}^{+\infty} g_k(z_1)(z_2^0)^k\right|<\frac{\varepsilon}{2};$$

于是

$$|g_n(z_1)(z_2^{(0)})^n|\leqslant\left|\sum_{k=n}^{+\infty} g_k(z_1)(z_2^0)^k\right|+\left|\sum_{k=n-1}^{+\infty} g_k(z_1)(z_2^0)^k\right|<\varepsilon,$$

亦即

$$|g_n(z_1)|b^n<\varepsilon. \qquad (5.2)$$

因此取定 z_2 满足 $|z_2|<b$，当 $n>N$，$|z_1|<\rho$ 时，

$$|g_n(z_1)z_2^n|<(|z_2|/b)^n\varepsilon,$$

从而级数(5.1)在 $|z_1|<\rho$ 内一致收敛．

如果 $b\geqslant B$，引理已得证．现在只需对 $b<B$，$b\leqslant|z_2|<B$ 情形作出证明．由(5.2)，$\exists N_1>0$，当 $n>N_1$，$|z_1|<\rho$，从而 $|z_1|\leqslant\rho$ 时

$$|g_n(z_1)|\leqslant b^{-n}. \qquad (5.3)$$

另一方面，级数 $f(z_1,z_2')$ 在 $|z_1|=\rho$ 上收敛．因此 $\forall z_1$ 满足 $|z_1|=\rho$，$\exists N_2=N_2(z_1)$，当 $n>N_2$ 时，

$$|g_n(z_1)|\leqslant B^{-n}. \qquad (5.4)$$

令

$$Q_n=\{z_1\,|\,|z_1|=\rho,\ |g_n(z_1)|>B^{-n}\}$$

$$=\{z_1\,|\,|z_1|=\rho,\ \frac{1}{n}\ln|g_n(z_1)|+\ln B>0\},$$

$$S_n=\bigcup_{k=n}^{+\infty} Q_k.$$

我们有 $S_1 \supset S_2 \supset \cdots \supset S_n \supset \cdots$ ．显然，Q_n 及 S_n 都是 $|z_1|=\rho$ 上的勒贝格可测集．因为级数 $f(z_1, z_2')$在 $|z_1|=\rho$ 上收敛，所以 $|z_1|=\rho$ 上的每一点不能属于无穷个 Q_n，从而

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} S_n = \varnothing .$$

由此得

$$\lim_{n \to +\infty} m S_n = \lim_{n \to +\infty} m Q_n = 0, \tag{5.5}$$

这里 m 表示勒贝格测度．

作在 $|z_1|<\rho$ 内调和、在 $|z|\leqslant\rho$ 上连续的调和函数 $\varphi_n(z)$，使得

$$\varphi_n(z_1)=\begin{cases} \dfrac{1}{n} \ln|g_n(z_1)|+\ln B, & (|z_1|=\rho, z_1 \in Q_n), \\ 0, & (|z_1|=\rho, z_1 \overline{\in} Q_n). \end{cases} \tag{5.6}$$

因此在 $|z_1|\leqslant\rho$ 上，$\varphi_n(z_1)\geqslant 0$．

令

$$\psi_n(z_1)=\frac{1}{n} \ln|g_n(z_1)|+\ln B-\varphi_n(z_1). \tag{5.7}$$

显然，当 $|z_1|=\rho$ 时，$-\infty\leqslant\psi_n(z_1)\leqslant 0$. 现证明在闭圆盘 $|z_1|\leqslant\rho$ 上，这不等式仍然成立．以 $g_n(z_1)$ 在 $|z_1|\leqslant\rho$ 上的各个零点为心作小圆，使得在这些小圆上，(5.4)成立，并且使得它们不相交且不互相包含；在 $|z|<\rho$ 内除去以这些小圆为边界的闭圆盘后，得一区域 R．于是 $\psi_n(z_1)$是在 R 内的调和函数，而在 R 的边界上，$\psi_n(z)\leqslant 0$．因此在 R 内也有这一不等式．注意到上述小圆可取得任意小，可见在 $|z_1|\leqslant\rho$ 上

$$-\infty\leqslant\psi_n(z_1)\leqslant 0. \tag{5.8}$$

下面只考虑$n>N_1$情形．由(5.3)及(5.7)，在$|z_1|=\rho$上，

$$0\leqslant\varphi_n(z_1)\leqslant\ln B-\ln b.$$

因此由普阿松积分，当$|z_1|\leqslant r<\rho$时，

$$0\leqslant\varphi_n(z_1)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi_n(\rho e^{i\theta})\frac{(\rho^2-|z_1|^2)d\theta}{\rho^2+|z_1|^2-2\rho|z_1|\cos(\theta-\arg z_1)}$$

$$\leqslant\frac{1}{2\pi}\frac{\rho+|z_1|}{\rho-|z_1|}(\ln B-\ln b)mQ_n.$$

由(5.5)，$\forall\varepsilon>0$，$\exists N'>0$，当$n>N'$，$|z_1|\leqslant r$时，

$$0\leqslant\varphi_n(z_1)\leqslant\varepsilon.$$

由(5.7)及(5.8)，当$n>N'$，$|z_1|\leqslant r$时，

$$-\infty\leqslant\frac{1}{n}\ln|g_n(z_1)|+\ln B\leqslant\varepsilon,$$

从而

$$|g_n(z_1)|\leqslant\left(\frac{e^\varepsilon}{B}\right)^n.$$

由此可见，当$|z_2|<\dfrac{B}{e^\varepsilon}$时，级数(5.1)在$|z_1|\leqslant r$上一致收敛．由于$\varepsilon$可取为任意小的正数，$r$可取作任意接近$\rho$．证完．

引理5.2　设函数$f(z_1,z_2)$在双圆盘$P(0,0;\rho_1,\rho_2)$(ρ_1，$\rho_2>0$)内确定，并且满足下列条件：

1)$f(z_1,z_2)$是$P(0,0;\rho_1,\rho_2{}')$内的两复变解析函数，其中$0<\rho_2{}'<\rho_2$；

2)$\forall z_1{}^0$满足$|z_1{}^0|<\rho_1$，$f(z_1{}^0,z_2)$在$|z_2|<\rho_2$内解析，那么$f(z_1,z_2)$是$P(0,0;\rho_1,\rho_2)$内的两复变解析函数．

证　由1')，在$P(0,0;\rho_1,\rho_2{}')$内，

$$f(z_1, z_2) = \sum_{j,k=0}^{+\infty} \alpha_{jk} z_1^j z_2^k = \sum_{k=0}^{+\infty} g_k(z_1) z_2^k, \tag{5.9}$$

其中

$$g_k(z_1) = \sum_{j=0}^{+\infty} \alpha_{jk} z_1^j \tag{5.10}$$

在 $|z_1| < \rho_1$ 内解析.

$\forall z_2^{(0)}$ 满足 $|z_2^{(0)}| < \rho_2'$, $\forall \rho_1' \in (0, \rho_1)$, $\sum_{k=0}^{+\infty} g_k(z_1)(z_2^{(0)})^k$ 在 $|z_1| \leqslant \rho_1'$上一致收敛.

由 2), $\forall z_1^{(0)}$ 满足 $|z_1^{(0)}| < \rho_1$, $f(z_1^{(0)}, z_2)$ 在 $|z_2| < \rho_2$ 时解析. 而 $\sum_{k=0}^{+\infty} g_k(z_1^{(0)}) z_2^k$ 在 $|z_2| < \rho_2'$内收敛于 $f(z_1^{(0)}, z_2)$, 于是在 $|z_2| < \rho_2$ 内也收敛于 $f(z_1^{(0)}, z_2)$. 因此 $\forall z_2'$满足 $|z_2'| < \rho_2$, $\sum_{k=0}^{+\infty} g(z_1)(z_2')^k$ 在 $|z_1| < \rho_1$ 内收敛.

由引理 5.1, 对任何 z_2 满足 $|z_2| \leqslant |z_2'|$, $\sum_{k=0}^{+\infty} g_k(z_1) z_2^k$ 在 $|z_1| \leqslant \rho_1''$上一致收敛, 其中 ρ_1''是小于 ρ_1'的任何正数. 因此 $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$, 当 $n > N$, $|z_1| \leqslant \rho_1''$时,

$$\left|\sum_{k=n}^{+\infty} g_k(z_1)(z_2')^k\right| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ 从而 } |g_n(z_1)||z_2'|^n < \varepsilon.$$

令

$$c_k = \max_{|z_1| \leqslant \rho_1''} \{ |g_k(z_1)| \},$$

$$M = \{ c_0, c_1 |z_2'|, \cdots, c_N |z_2'|^N, \varepsilon \}.$$

于是 $\forall k \in \mathbb{N}$

$$c_k \leqslant M / |z_2'|^k.$$

对于(5.10)应用柯西不等式, 我们有: $\forall j, k \in \mathbb{N}$,

$$|\alpha_{jk}| \leqslant c_k / (\rho_1'')^j \leqslant M / (\rho_1'')^j |z_2'|^k .$$

因此当 $|z_1| < \rho_1''$, $|z_2| < |z_2'|$ 时，(5.9)中二重级数一致绝对收敛．于是$f(z_1, z_2)$在 $P(0,0;\rho_1'', |z_2'|)$内解析．由于ρ_1''及$|z_1'|$的任意性，引理 5.2 得证．

现在我们可以证明哈托格斯定理：

定理 5.1 设函数$f(z_1, z_2)$在双圆盘 $P(0,0;\rho_1, \rho_2)$ $(\rho_1, \rho_2 > 0)$内确定，并且满足定理 4.1 中的假设 1) 及 2)，那么 $f(z_1, z_2)$是在 $P(0,0;\rho_1, \rho_2)$内的两复变解析函数．

证 考虑双圆盘 $P(0,0;\rho_1, \rho_2/3)$，取 $\rho_1' \in (0, \rho_1)$．由定理 4.2，$f(z_1, z_2)$是在一个区域

$$\{(z_1, z_2) \mid |z_1| < \rho_1', \ |z_2 - z_2^{(0)}| < r\}$$

内的两复变解析函数，其中圆盘$|z_2 - z_2^{(0)}| < r$包含在$|z_2| < \rho_2/3$内．

由于 $f(z_1, z_2)$是在区域

$$\{(z_1, z_2) \mid |z_1| < \rho_1', \ |z_2 - z_2^{(0)}| < 2\rho_2/3\}$$

内确定并且满足定理 4.1 中的条件 1)及 2)，由引理 5.2，$f(z_1, z_2)$是在这区域内，从而是在 $z_1 = 0$，$z_2 = 0$ 的一个邻域内的两复变解析函数，再应用一次引理 5.2 就得到定理的结论．

我们知道，在区域 $D(\subset \mathbb{C})$内确定的单复变解析函数，就是在 D 内处处有导数的负值函数．根据哈托格斯定理，可把在区域 $D(\subset \mathbb{C}^2)$内确定的两复变函数定义为在 D 内处处有一阶偏导数的复值函数，而不需要求它为在 D 内处处可微，或者在 D 内处处连续，并且有一阶偏导数．

习 题 九

1．设 D_1 及 D_2 分别是 z_1 及 z_2 平面上的两个区域，并且$\{z_1^{(m)}\} \subset D_1$及$\{z_2^{(n)}\} \subset D_2$ $(m, n = 1, 2, 3, \cdots)$分别在 D_1 及 D_2 内有聚点．设 $f(z_1, z_2)$在

$D_1 \times D_2=\{(z_1,z_2)|z_1\in D_1, z_2\in D_2\}$内解析，并且$f(z_1^{(m)}, z_2^{(n)})=0(m, n=1,2,\cdots)$. 求证在$D_1\times D_2$内，$f(z_1,z_2)\equiv 0$.

2. 证明关于两复变解析函数的希瓦尔兹引理：设$f(z_1,z_2)$在球B: $|z_1|^2+|z_2|^2<1$内解析，设$f(0,0)=0$，并且$|f(z)|$在B内的上界是1，那么当$(z_1,z_2)\in B$时，

$$|f(z_1,z_2)|\leqslant\sqrt{|z_1|^2+|z_2|^2}.$$

如果当$(0,0)\neq(z_1^{(0)},z_2^{(0)})\in B$时，

$$|f(z_1^{(0)}, z_2^{(0)})|=\sqrt{|z_1^{(0)}|^2+|z_2^{(0)}|^2},$$

那么当$|\lambda|<1/\sqrt{|z_1^{(0)}|^2+|z_2^{(0)}|^2}$时，

$$f(\lambda z_1^{(0)}, \lambda z_2^{(0)})=\lambda f(z_1^{(0)}, z_2^{(0)}).$$

3. 设复系数幂级数

$$\sum_{m,n=0}^{+\infty} c_{mn}z^m w^n \text{ 及} \sum_{m=0}^{+\infty} a_m z^m \quad (z, w\in \mathbb{C})$$

及实系数幂级数

$$\sum_{m,n=0}^{+\infty} C_{mn}z^m w^n \text{ 及} \sum_{m=0}^{+\infty} A_m z^m.$$

分别满足

$$|c_{mn}|\leqslant C_{mn}, |a_m|\leqslant A_m \quad (m,n=0,1,2,\cdots),$$

那么后两幂级数分别称为前两幂级数的控制级数.

(1) 设

$$f(z,w)=\sum_{m,n=0}^{+\infty} c_{mn}z^m w^n$$

在$\{(z,w)||z|\leqslant r, |w|\leqslant r\}(r>0)$上解析，求证在$|z|<r, |w|<r$内，$f(z,w)$必然有一控制级数，其和为

$$F(z,w)=\frac{M}{(1-z/r)(1-w/r)},$$

其中M是一正数.

(2) 证明在$z=0$的一个邻域内，微分方程

$$\frac{dw}{dz}=F(z,w)$$

必然有解析的解．

3）设 $f(z,w)$在 $z=0,w=0$ 的一个邻域内解析．证明微分方程

$$\frac{dw}{dz}=f(z,w)$$

在 $z=0$ 的一个邻域内必然有唯一一个解析的解 $w=g(z)$满足 $g(0)=0$．

4．设 $f(z_1,z_2)$在球环 $S: r^2<|z_1|^2+|z_2|^2<R^2$ 内解析．证明：

(1) $f(z_1,z_2)$可以解析开拓成球 $B:|z_1|^2+|z_2|^2<R^2$ 内解析的函数 $g(z_1,z_2)$．

(2)两复变数的解析函数不可能有孤立奇点．

[提示]

$$g(z_1,z_2)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z_1,w)dw}{w-z_1},$$

其中 γ 是圆心在 0、半径为 $\rho\left(\sqrt{r^2-|z_1|^2}<\rho<\sqrt{R^2-|z_1|^2}\right)$ 的圆，$|z_2|<\rho$．用哈托格斯定理证明 $g(z_1,z_2)$在 B 内解析．

附录一　集与逻辑记号

1. 集的初步概念　不论在数学或是在日常生活中，我们经常遇到集这个概念．此外，在数学叙述中采用一些逻辑记号比较方便．本书中要用到关于集的一些概念和逻辑记号，这里对它们作一些简单介绍．

所谓集或集合就是指一些特定事物的全体，其中各个事物称为这集的元素．我们常用大写字母 $A, B, C, \cdots$ 表示集，用小写字母 $a, b, c, \cdots$ 表示集中的元素．如果 a 是集 A 的元素，我们说 a 属于 A，记作 $a \in A$，反之，我们说 a 不属于 A，记作 $a \bar{\in} A$．

可以列举集中的元素表示集．例如含元素 a, b, c 的集可表示为 $\{a, b, c\}$．也可以用集中元素的特征性质来表示集，例如 $\{0, 1, 2, 3\}$ 可以表示为 $\{n \mid n$ 是整数，$0 \leqslant n \leqslant 3\}$．数学中常见的一些集及其记号如下：

全体自然数集 $\{0, 1, 2, 3, \cdots\}$ 记作 $\mathbb{N}$；

全体整数集 $\{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots\}$ 记作 $\mathbb{Z}$；

全体有理数集 $\{p/q \mid p$ 及 $q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$ 记作 $\mathbb{Q}$；

全体实数集记作 $\mathbb{R}$；

全体复数集记作 $\mathbb{C}$；

不含任何元素的集称为空集，记作 $\varnothing$．

如果集 B 中的任何元素都是集 A 中的元素，我们说 B 是 A 的子集，或者说 A 包含 B，记作 $A \supset B$ 或 $B \subset A$．显然，$A \subset A$，并且 $\varnothing \subset A$．如果集 A 与集 B 中的元素相同，亦即 $A \supset B$，并且 $A \subset B$，我们说 A 与 B 相等，记作 $A = B$．

如果集 C 是由至少属于 A 及 B 两集之一的一切元素所组成，我们说 C 是 A 及 B 的并集，记作 $C = A \cup B$．如果集 D 是由既

属于集 A、又属于集 B 的一切元素所组成，我们说 D 是集 A 及集 B 的交集，记作 $D=A\bigcap B$．如果集 A 及集 B 的交集是空集，亦即 $A\bigcap B=\varnothing$，我们说集 A 与集 B 不相交．如果集 E 是由属于集 A、但不属于集 B 的一切元素所组成，我们说集 E 是集 A 与集的差集，记作 $E=A-B$．并集与交集的概念也可推广到任意有限个或无穷个集的情形，例如已给集 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$，那么它们的并集记作 $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$；它们的交集记作 $\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n$．如果 $A\supset B$ 且 $A-B$ 称为 B 关于 A 的余集，记作 B_A^c；在不产生混淆时，也可记作 B^c．

运算 $\bigcup$ 及 $\bigcap$ 满足集合的交换律、结合律及分配律．

已给两个集 X 及 Y，它们的积的定义是：

$$X\times Y=\{(x,y)|x\in X,y\in Y\}.$$

积的定义也可推广到有限个或无穷多个集．

2．函数与映射　设 X 及 Y 是两个集．使 X 中任何元素对应于 Y 中一个确定的元素的任何法则，称为在 X 上确定、在 Y 中取值的一个函数；集 X 称为函数的定义集．设 f 是这样的一个函数，如果 $x\in X$，并且如果 y 是 Y 中与 x 对应的元素，我们说 y 是 x 关于 f 的象，而 x 是 y 的原象，记作 $y=f(x)$．我们也说 f 是从 X 到 Y 的一个映射，记作 $x\mapsto f(x)$，也可简单记作 $f:X\to Y$ 或 $X\xrightarrow{f}Y$.

如果 $Y=\mathbb{R}$，我们说 f 是一实值函数．如果 $X=\mathbb{R}$ 或 $X\subset\mathbb{R}$，我们说 f 是一实变函数．

设 X,Y,Z 是三个集，$f:X\to Y$，$g:Y\to Z$ 是两个映射，即从 X 到 Z 的映射 $x\mapsto g(f(x))$ 称为 g 及 f 的复合映射，记作 $g\circ f$．例如设 $X=Y=Z=\mathbb{R}$，$f(x)=\sin x$，$g(x)=x^2$．我们有

$$(g\circ f)(x)=\sin^2x,\ (f\circ g)(x)=\sin x^2.$$

一般说来，$g\circ f$ 与 $f\circ g$ 不是同一映射．

设$f: X\to Y$．如果 X 中任意两个不同元素关于f在 Y 中有不同的象，那么我们说f是一个内射．如果 Y 中任一元素在 X 中至少有一个关于f 的原象，我们说f是一个满射，或者说它把 X 映射到 Y 上．如果f 既是内射又是满射，那么我们说它是一个双射．

设 $f: X\to Y$ 是一个双射．任给$y\in Y$，那么有一个并且只有一个 $x\in X$，使得 $y=f(x)$，把这个 x 记作 $g(y)$．这样我们定义了一个映射 $g: Y\to X$，称为f 的逆映射，记作f^{-1}；它也是一个双射．设 $x\in X$．显然有$f^{-1}(f(x))=x$，于是得到 X 上的一个恒等映射 $f^{-1}\circ f=\mathrm{id}_X: x\mapsto x$．另一方面，设$y\in Y$，则有$f(f^{-1}(y))=y$，也就是得到$f\circ f^{-1}=\mathrm{id}_Y$．

以上涉及的是元素的象，我们也要考虑集的象．设$f: X\to Y$，X 的子集 A 关于f 的象定义为

$$f(A)=\{f(x)|x\in A\}.$$

显然，$f(A)\subset Y$．Y称为f 的值集．Y 的子集 B 关于 f 的原象或关于逆映射f^{-1} 的象定义为

$$f^{-1}(B)=\{x|x\in X, f(x)\in B\}.$$

$f^{-1}(B)$也可能是空集．

集是数学中的一个基本概念．按照法国布尔巴基学派的观点，数学的研究对象是具有各种各样结构的集．例如对 $\mathbb{R}$ 引进满足交换律、结合律及分配律的加、减、乘、除运算，即引进一种代数结构，它就成为实数域．对 $\mathbb{R}$ 引进满足某些条件的距离及邻域，即引进一种拓扑结构，它就成为一种特别的拓扑空间和度量空间，即一维欧氏空间．在 $\mathbb{R}$ 中引进满足某些条件的大、小概念，即引进一种顺序结构，它就成为有序集和有序空间．

3．逻辑记号 在数学叙述中，采用一些逻辑记号比较方便．本书中要采用这些记号，在这里对它们作一些简单介绍．

逻辑中有两个常用的量词，即“$\forall$”与“$\exists$”，它们分别表示“对于任何”与“存在着”．设集 $E=\{0,1,2,3,8\}$．那么：

$\forall x\in E$，$x\leqslant 8$．事实上，对于 E 中任何元素 x，总有 $x\leqslant 8$．

$\exists x\in E$，使得 $3\leqslant x\leqslant 4$．事实上，E 中存在着元素 x，使得 $3\leqslant x\leqslant 4$.

又如设 $x\mapsto f(x)(\in\mathbb{R})$的定义集为 $[a,b]$，$x_0\in(a,b)$，那么 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\alpha\ (\in\mathbb{R})$的定义是：

$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使得 $\forall x\in[a,b]\bigcap(x_0-\delta,\ x_0+\delta)-\{x_0\}$，$|f(x)-\alpha|<\varepsilon$.

在逻辑中常用到“蕴涵”和“等价”的记号“$\Longrightarrow$”和“$\Longleftrightarrow$”．已给两个陈述或性质 P_1 及 P_2．“$P_1\Longrightarrow P_2$”表示 P_1 蕴涵 P_2，即由 P_1 可导出 P_2．“$P_1\Longleftrightarrow P_2$”表示 P_1 与 P_2 等价，即同时有 $P_1\Longrightarrow P_2$ 及 $P_1\Longleftarrow P_2$（或$P_2\Longrightarrow P_1$）．例如

$\forall x\in\mathbb{R}$，$x\geqslant 1\Longrightarrow x>0$；

$\forall x\in\mathbb{N}$；$x\geqslant 1\Longleftrightarrow x>0$．

逻辑中也常采用否定词“非”．设 P 是一陈述或性质．“非 P”表示陈述 P 或性质 P 不成立．许多陈述或性质满足“排中律”，即 P 与非 P 两者中必然有一个，并且只有一个成立．数学中的陈述一般满足排中律．已给集 E．考虑满足排中律的性质或陈述 P 及 P_1．如果 P 是：

$\exists x\in E$，P_1，

那么非 P 是：

$\forall x\in E$，非 P_1．

反之，如果 P 是：

$\forall x\in E$，P_1，

那么非 P 是

$\exists\ x\in E$，非 P_1．

应用这些原则，考虑上面的例子 P：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\alpha$，那么我

们有：

$$非 P \iff 非(\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0, 使得$$
$$\forall x \in [a,b] \cap (x_0-\delta, x_0+\delta)-\{x_0\}, |f(x)-\alpha|<\varepsilon)$$
$$\iff \exists \varepsilon>0, 非(\exists \delta>0, 使得$$
$$\forall x \in [a,b] \cap (x_0-\delta, x_0+\delta)-\{x_0\}, |f(x)-\alpha|<\varepsilon)$$
$$\iff \exists \varepsilon>0, \forall \delta>0, 非(使得$$
$$\forall x \in [a,b] \cap (x_0-\delta, x_0+\delta)-\{x_0\}, |f(x)-\alpha|<\varepsilon)$$
$$\iff \exists \varepsilon>0, \forall \delta>0, 使得$$
$$\exists x \in [a,b] \cap (x_0-\delta, x_0+\delta)-\{x_0\}, |f(x)-\alpha| \geqslant \varepsilon.$$

习　题

1．设 A，B，C 是三个集，证明下列等式：

(1) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;

(2) $(A \cap B) \cap C = (A \cap B) \cap C$;

(3) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$;

(4) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$;

(5) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$;

(6) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$，这里 c 表示余集．

2．设 $f: X \to Y$ 是一映射．

(1) 如果 f 是满射，那么对 Y 的任何子集 Z，$f(f^{-1}(Z))=Z$；否则对于 Y 的某些子集 Z，$f(f^{-1}(Z)) \neq Z$．

[提示] 考虑 $\emptyset = Z \subset Y - f(x)$．

(2) 如果 f 是内射，那么对 X 的任何子集 Z，$f^{-1}(f(Z))=Z$；否则对于 X 的某些子集 Z，$f^{-1}(f(Z)) \neq Z$．

[提示] 考虑 $Z=\{x_1\} \subset X$，并设 $\exists x_2 \in X$，$x_2 \neq x_1$，但 $f(x_2) = f(x_1)$．

3．设 $f: x_1 \mapsto x-1$，$g: x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$，其中 $x \in \mathbb{R}$．求 $f \circ g$ 及 $g \circ f$．

4．设 $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 及 $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 是两映射，其中

$$f: n \mapsto 2n;$$

$$g=\begin{cases} n/2 & (\text{当}n\text{为偶数时}), \\ (n+1)/2 & (\text{当}n\text{为奇数时}), \end{cases}$$

(1)这两映射是内射、满射，还是双射？

(2)求$f\circ g$及$g\circ f$.

5.设$f:E\to F$是一映射.证明：

(1)如果B及B_1是F的子集，那么

$$f^{-1}(B\cap B_1)=f^{-1}(B)\cap f^{-1}(B_1),f^{-1}(B\cup B_1)=f^{-1}(B)\cup f^{-1}(B_1),$$
$$f^{-1}(F-B)=E-f^{-1}(B).$$

(2)如果A及A_1是E的子集，那么

$$f(A\cup A_1)=f(A)\cup f(A_1),f(A\cap A_1)\subset f(A)\cap f(A_1),$$

并且可能有$f(A\cap A_1)\neq f(A)\cap f(A_1)$.

[提示](2)考虑$E=\mathbb{R}$, $A=[0,1)$, $A=[1,2]$, $x\mapsto f(x)=1$.

6.设$E=\{0,1,4,8,12,14,17\}$.下列各陈述中哪些是正确的？哪些是错误的？作出每一陈述的非陈述.

(1)$\forall x\in E$, $x\geqslant 0$;

(2)$\exists x\in E$使得$x\geqslant 0$;

(3)$\forall x\in E$, x是偶数；

(4)$\exists x\in E$，使得x是偶数.

7.设陈述P是“任何正整数可写成四个整数的平方的和.”显然，这一陈述不正确.试用逻辑记号写出P及非P.

8.设$f:[a,b]\to\mathbb{R}$是一映射.试用逻辑记号表明$f(x)$是$[a,b]$上的一致连续及不一致连续函数的定义.

*附录二　约当定理

先叙述关于复平面 $\mathbb{C}$ 的拓扑的一些补充知识：

1）开集的余集是闭集，闭集的余集是开集．

2）任意个开集的并集是开集，任意个闭集的交集是闭集．

3）任给 $\mathbb{C}$ 上一个紧集 $A\neq\emptyset$ 及一个闭集 $B\neq\emptyset$，若 $A\cap B=\emptyset$，则 $\exists\alpha\in A$，$\exists\beta\in B$，使得 $|\alpha-\beta|=\inf\limits_{a\in A,\,b\in B}\{|a-b|\}>0$，这里 $|\alpha-\beta|$ 称为集 A 及集 B 的距离．

这些结果的证明在一般数学分析及实变函数的教材中都可找到．

现在引进一个定义．设 $G(\neq\emptyset)$ 是一个开集，设 $G_1,G_2,\cdots,G_n$ 是一些非空的连通开集即一些区域，$G_k\cap G_l=\emptyset(k,l=1,2,\cdots,n;k\neq l)$，并且 $G=\bigcup\limits_{k=1}^{n}G_k$，那么 $G_1,\cdots,G_n$ 称为开集 G 的连通分支．

约当定理　任一条约当闭曲线把复平面分成两个没有公共点的区域：一个有界的称为它的内区域，一个无界的称为它的外区域；这两个区域都以已给的约当曲线作为边界．

把已给的约当闭曲线记作 J，并且把定理结论中的内及外区域分别记作 D_1 及 D_2．我们要证明 $\mathbb{C}-J$ 恰好有两个连通分支 D_1 及 D_2，即

$$D_1\bigcup J\bigcup D_2=\mathbb{C},\ D_1\bigcap D_2=\emptyset,$$

$$\partial D_1=\partial D_2=J.$$

这定理的证明分下列几步进行：

(1) 当 J 是简单闭多边形时，定理成立．

设 $J=a_1a_2a_3\cdots a_{n-1}a_na_1$ 是 $\mathbb{C}$ 上一个简单闭多边形，其中 $a_1,\cdots,a_n$ 是它的顶点．取定 $\alpha(\neq0)\in\mathbb{C}$．并设向量 α 不与

诸线段 $\overline{a_1a_2}, \overline{a_2a_3}, \cdots, \overline{a_{n-1}a_n}, \overline{a_na_1}$ 之任一平行．$\forall z\in\mathbb{C}$，取以 z 为起点，且与向量 α 平行的半射线：

$$H_z=\{z+t\alpha \mid t\in\mathbb{R}, t\geqslant 0\}.$$

定义下列两集合：

$$A=\{z \mid z\in\mathbb{C}-J, H_z\cap J=\varnothing \text{ 或含偶数个点}\},$$
$$B=\{z \mid z\in\mathbb{C}-J, H_z\cap J \text{ 含奇数个点}\},$$

其中在计算 $H_z\cap J$ 中点的个数时，若某一 $a_i\in H_z\cap J$，则当 H_z 在 a_i 处贯穿 J 时，把 a_i 算作一点；而当以 a_i 为端点的 J 的两个邻边在 H_z 同一侧时，把 a_i 算作两点．

在 $\mathbb{C}$ 中任取一与 J 不相交的线段．当 z 沿着这线段变动时，$H_z\cap J$ 中点的个数只有当 H_z 通过 J 的顶点时才可能改变．但按上述计数规则，这时 $H_z\cap J$ 中点的个数虽然可以变化，但奇偶性不会改变．由此可知，若 $L\subset\mathbb{C}-J$ 是任一折线，那么或者 $L\subset A$，或者 $L\subset B$，从而 A 中的点与 B 中的点不能用 $\mathbb{C}-J$ 中的折线来连接．

我们可看出 $\mathbb{C}-J=A\cup B$，$A\cap B$，并且 A 及 B 都是开集．现在只须证明：如果 z 及 $z'\in A$（或 B），那么可用 $\mathbb{C}-J$ 中的折线把 z 及 z' 连接起来．作线段 $\overline{zz'}$．如果 $\overline{zz'}\cap J=\varnothing$，那么 $\overline{zz'}$ 就合乎要求．否则从 z 开始，沿 $\overline{zz'}$ 前进到 $\overline{zz'}$ 与 J 的第一个交点邻近，不与 J 相遇，沿着与 J 的边平行的一些折线前进，一直到 $\overline{zz'}$ 与 J 的最后一个交点邻近，然后转到线段 $\overline{zz'}$ 上来前进到 z'．这样就得到连接 z 及 z' 且不与 J 相交的一条折线．于是 A 及 B 都是区域，且不难看出 $\partial A=\partial B=J$．(1)证完．

(2)非闭的约当曲线 J_1 不能把 $\mathbb{C}$ 分成彼此不相交的区域．

假定这命题不成立．设 J_1 的端点是 α 及 $\beta(\alpha\neq\beta)$，并且把 J_1 记作 $\widehat{\alpha\beta}$．设 R_1 是 $\mathbb{C}-\widehat{\alpha\beta}$ 的一个连通分支，那么 $\partial R_1=\widehat{\alpha_1\beta_1}\subset\widehat{\alpha\beta}$，并且 $\overline{R_1}=R_1\cup\widehat{\alpha_1\beta_1}\neq\mathbb{C}$．设 Q 是开集 $\mathbb{C}-\overline{R_1}$ 的一个连通分支，那么 $\partial Q=\widehat{ab}\subset\widehat{\alpha_1\beta_1}$．设 R 是开集 $\mathbb{C}-(Q\cup$

$\widehat{ab}$)中包含 R_1 的一个连通分支．于是 $Q\cap R=\varnothing$，即 Q 及 R 是 $\mathbb{C}-\widehat{ab}$ 的两个不同的连通分支．

取 a 及 b 为圆心，作互不相交、内区域也不相交、且与 $\widehat{ab}$ 分别交于 z_1 及 z_2 的两个圆 C_a 及 C_b，使得 $\widehat{az_1}-\{z_1\}$ 及 $\widehat{bz_2}-\{z_2\}$ 分别包含在 C_a 及 C_b 的内区域内，这里弧 $\widehat{az_1}$ 及 $\widehat{bz_2}\subset\widehat{ab}$．

取 a 及 b 为圆心，作分别包含在 C_a 及 C_b 内的圆 C_a'及 C_b'，使得 $C_a'\cap\widehat{z_1b}=C_b'\cap\widehat{az_2}=\varnothing$，这里弧 $\widehat{z_1b}$ 及 $\widehat{az_2}\subset\widehat{ab}$．

取极坐标，以 b 为极点．设 $T(\theta)$是以(r,θ)，$(r,\theta+2\pi/3)$ 及$(r,\theta-2\pi/3)$为顶点的三角形，这里 r 是 C_b'的半径．取 b 为圆心，作半径充分小的圆 C_b''，使得$\forall\theta\in[0,2\pi)$，C_b''包含在 $T(\theta)$ 的内区域内．取一点沿 $\widehat{ab}$ 从 b 向 a 运动，设这时 z 是 $\widehat{ab}$ 与 C_b'' 的第一个交点，于是 $\widehat{bz}-\{z\}$包含在 C_b''的内区域内，这里 $\widehat{bz}\subset\widehat{ab}$．取 b 为圆心，作圆 C_b''，使得 $\widehat{az}\cap C_b''=\varnothing$，这里 $\widehat{az}\subset\widehat{ab}$．再取 b 为圆心，作圆 C_b^*，使得它在 C_b''内，并且满足 $\widehat{az}\cap C_b''=\varnothing$，这里 $\widehat{az}\subset\widehat{ab}$．

因为 a 及 $b\in\partial Q\cap\partial R$，所以只要 C_a'及 C_b''充分小，$\exists$ 折线 $\widetilde{a_1b_1}\subset R$，$\exists$折线 $\widetilde{a_2b_2}\subset Q$，使得 $\widetilde{a_kb_k}\cap C_a'=a_k$，$\widetilde{a_kb_k}\cap C_b''=b_k\,(k=1,2)$．那么 $\widetilde{a_1b_1}\cup\overline{b_1b_2}\cup\widetilde{a_2b_2}\cup\overline{a_1a_2}$ 是与 $\widehat{xz}$ ($\subset\widehat{ab}$)不相交的一个多边形 P，其中$\overline{a_1a_2}$ 及$\overline{b_1b_2}$ 分别是圆 C_a'及圆 C_b''的弦，适当选取 θ，使得 $T(\theta)=T$ 的顶点不在 P 上，且 T 本身不含 P 的顶点．设 W 是 T 及 P 的内区域的并集，并且令 $B=\partial W$，那么 B 也是一个多边形．令 $G=B-(\overline{a_1a_2}-\{a_1,a_2\})$．

由于 $\widehat{z_1b}\subset W$，我们有 $G\cap\widehat{z_1b}=\varnothing$．另一方面，由于 $G\subset\widetilde{a_1b_1}\cup T\cup\widetilde{a_2b_2}\subset R\cup T\cup Q$，我们有 $G\cap\widehat{az_1}=\varnothing$．于是 $G\cap\widehat{ab}=\varnothing$，从而 $G\subset\mathbb{C}-\widehat{ab}$．因此折线 G 连接 $a_1(\in R)$及 $a_2(\in Q)$，而 $Q\cap R=\varnothing$．这样就得一矛看．证完．

系　设 J 是一条闭约当曲线，并且设 Q 是 $\mathbb{C}-J$ 的一个连通分支，那么 $\partial Q=J$．

我们知道 $\partial Q\subset J$. 如果 $\partial Q\neq J$, 那么 $\exists\widehat{ab}\subset J(a\neq b)$, 它把 $\mathbb{C}-J$ 分成几个连通分支. 这与(2)相矛盾.

(3) 当 J 包含一段直线段时, 约当定理成立.

设 J 由一个直线段 $\overline{aOb}$ 及一个弧 $\widehat{azb}$ 构成, 而且 $\overline{aOb}\cap\widehat{azb}=\{a,b\}$. 作一个圆心为 O 的圆, 使得以它为边界的闭圆盘与 $\widehat{azb}$ 不相交. 设 $C\cap\overline{aOb}=\{u,v\}$, 并且 C_1 及 C_2 是构成 $C-\{u,v\}$ 的两个不含端点的半圆弧, 那么 $\mathbb{C}-J$ 中没有折线连接 C_1 及 C_2 中的点. 否则, 设 K 是连接 $p_1\in C_1$ 及 $p_2\in C_2$ 的这样一条折线, 且可设 K 在 C 的内区域以外, 考虑多边形 $P=K\cup\overline{p_1p_2}$, 线段 $\overline{p_1p_2}$ 把以 C 为边界的圆盘分成两部分, 分别包含在 P 的内区域及外区域内, 从而 u 及 v 分别属于这两区域. 于是连接 u 及 v 的曲线 $\overline{ua}\cup\widehat{axb}\cup\overline{bv}$ 必然与 K 相交于一点, 与 $K\subset\mathbb{C}-J$ 这一假设相矛盾. 这样就证明了 $\mathbb{C}-J$ 是不连通的.

现在证明 $\mathbb{C}-J$ 至多有两个连通分支. 由(2)中的系, 设 Q 是任一连通分支, 则 $\partial Q=J$. 我们有 $Q\cap(C_1\cup C_2)\neq\phi$. 由于 $C_1\cup C_2\subset\mathbb{C}-J$, 如果 $C_k\cap Q\neq\phi\ (k=1,2)$, 那么 $C_k\subset Q$. 证完.

为了完成约当定理的证明, 先引进可达点这一概念. 设 $G\ (\subset\mathbb{C})$ 是一区域; 且 $p\in\partial G$. 如果有一约当曲线 $\widehat{pq}$, 使得 $\widehat{pq}-\{p\}\subset G$, 那么 p 称为区域 D 的可达点.

不难看出, ∂G 上任一点 a 的任何邻域中一定有 G 的可达点. 事实上, $\forall\varepsilon>0$, 在以 a 为心、以 ε 为半径的圆盘 D_ε 内, $z\in G$. 作线段 $\overline{za}\subset D_\varepsilon$, 那么 $J\cap\overline{za}$ 是一有界闭集 F. 因此 $\exists z^*\in\overline{za}\cap J$, 使得 $|z^*-z|$ 恰好是 F 及 z 的距离. 于是 z^* 是 G 的一个可达点.

如果 ∂G 是约当曲线, 那么 ∂G 上每一点都是可达点. 事实上, 圆盘边界上每一点是可达点. 于是由第六章中定理 8.1 和定理9.1, 以及约当定理, 就可证明这一结论.

(4)约当定理成立.

作直线 l，使得在 l 上有属于 J 的点，并且使得 $l\cap J$ 中的点多于一个，但不形成只是一个线段．取 $z_0\in l$ 使得在 l 上，z_0 的两侧都有 $l\cap J$ 中的点．于是 l 可以分成从 z_0 出发的两个半射线 l_+ 及 l_-，显然，$l_+\cap J$ 及 $l_-\cap J$ 都是非空的有界闭集，在其中分别有与 z_0 最近的点 a 及 b．因此线段 $\overline{ab}$ 满足 $\overline{ab}\cap J=\{a,b\}$.

设 $\widehat{az_1b}$ 及 $\widehat{az_2b}$ 是 J 上从 a 到 b 的两段弧，并且令 $S_1=\overline{ab}\cup\widehat{az_1b}$ 及 $S_2=\overline{ab}\cup\widehat{az_2b}$．由(3)，$\mathbb{C}-S_1$ 及 $\mathbb{C}-S_2$ 分别是由两对不相交的区域 D_1，R_1 及 D_2、R_2 组成，其中 $D_1\supset\widehat{az_2b}-\{a,b\}$，$D_2\supset\widehat{az_1b}-\{a,b\}$．由于 $\mathbb{C}-(S_1\cup S_2)=R_1\cup R_2\cup(D_1\cap D_2)$，我们有 $\mathbb{C}-J=(R_1\cup R_2\cup\overset{\circ}{\overline{ab}})\cup(D_1\cap D_2)$，其中 $\overset{\circ}{\overline{ab}}=\overline{ab}-\{a,b\}$.

不难看出，$R_1\cup R_2\cup\overset{\circ}{\overline{ab}}$ 是一非空连通开集，从而是一区域，此外，它与开集 $D_1\cap D_2$ 不相交；这是因为 $(D_1\cap D_2)\cap(R_1\cup R_2\cup\overset{\circ}{\overline{ab}})=(D_1\cap D_2\cap R_1)\cup(D_1\cap D_2\cap R_2)\cup(D_1\cap D_2\cap\overset{\circ}{\overline{ab}})=\varnothing$.

现在只须证明开集 $D_1\cap D_2$ 是一区域．由于 $z_2\in D_1$，z_2 有一邻域包含在 D_1 内；另一方面，由于 $z_2\in\partial D_2$，在上述邻域中有一点属于 D_2，因此 $D_1\cap D_2\neq\varnothing$.

最后证明 $D_1\cap D_2$ 的连通性．设 G 是 $D_1\cap D_2$ 的一个连通分支．由(2)中的系，$\partial G=J$.

在 $\widehat{az_1b}$ 上选取 G 的可达点 a_1 及 b_1，作折线 $\widetilde{a_1b_1}$，使得 $\widetilde{a_1b_1}\cap J=\{a_1,b_1\}$，$\widetilde{a_1b_1}-\{a_1,b_1\}\subset G$，并且使得 $\widehat{aa_1}\cap\widehat{bb_1}=\varnothing$，这里 $\widehat{aa_1}$ 及 $\widehat{bb_1}\subset\widehat{az_1b}$．于是 $S=\widetilde{a_1b_1}\cup\widehat{a_1a}\cup\overline{ab}\cup\widehat{bb_1}$ 是满足(3)中条件的一条闭约当曲线，并且 $S\subset G\cup J\cup\overline{ab}$.

如果 H 及 K 是 $\mathbb{C}-S$ 的两个不同的连通分支，那么因为 S 含有 G 中及 $\overline{ab}$ 上的点，可见 $H\cap J\neq\varnothing\neq K\cap J$.

假定 $D_1\cap D_2$ 还有一个连通分支 G_1，并且 $G_1\cap G=\varnothing$，那么

$G_1 \cap S \neq \varnothing$，因为否则 $G_1 \subset \mathbb{C} - S$，于是 $G_1 = H$，或者 $G_1 = K$，从而 $G_1 \cap J \neq \varnothing$，与 $\partial G_1 = J$ 相矛盾.

注意到 $(D_1 \cap D_2) \cap (R_1 \cup R_2 \cup \overset{\frown}{ab}) = \varnothing$，$G_1 \subset D_1 \cap D_2$，可见 $G_1 \cap \overset{\frown}{ab} = \varnothing$，并且 $\varnothing \neq G_1 \cap S = G \cap (S - \overset{\frown}{ab}) = G_1 \cap (\overset{\frown}{aa_1} \cup \widetilde{a_1 b_1} \cup \overset{\frown}{b_1 b})$. 于是开集 G_1 必含 $\overset{\frown}{aa_1} \cup \widetilde{a_1 b_1} \cup \overset{\frown}{b_1 b}$ 上一点，因而必含该点的一个邻域 V. 由于 $\widetilde{a_1 b_1} \subset G$，并且 $\overset{\frown}{aa_1} \cup \overset{\frown}{bb_1} \subset \partial G$，可见 $V \cap G \neq \varnothing$. 但 $V \subset G_1$，这样就与 $G_1 \cap G = \varnothing$ 相矛盾. 因此 $D_1 \cap D_2$ 没有两个不同的连通分支，从而是一区域. 证完.

以约当闭曲线为边界的区域称为**约当区域**.

索　引

每一术语后列出英语译文以及它在本书中初次出现的地方，举例如下：

区域，region，Ⅱ，1　　在第二章，第1段

集，set，AⅠ，1　　在附录一，第一段

双曲正弦函数，hyperbolic sine function，EⅡ，11　　在习题二，第11题

四　画

五 画

六 画

七 画

八　画

九 画

十　画

十一画

十 二 画

十 三 画

外国人名译名对照表

外尔斯特拉斯　K .Weierstrass
古尔萨　E . Goursat
布拉施克　W. Blaschke
布尔巴基　N. Bourbaki
叶尼采夫斯基　S. Janiszewski
毕卡　E. Picard
达朗贝尔　J. d′Alembert
刘维尔　J. Liouville
米塔格－列夫勒　M. G. Mittag－Leffler
狄里克莱　L. Dirichlet
克里斯托菲尔　E. B. Christoffel
阿贝尔　N. H. Abel
阿达马　J. Hadamard
希瓦尔兹　H. A. Schwarz
欧几里德　Euclid
欧拉　L. Euler
罗朗　P. A. Laurent
奈望林纳　R. Nevanlinna
哈托格斯　F. M. Hartogs
柯西　A. L. Cauchy
莫勒拉　G. Morera
泰勒　B. Taylor
维塔利　G. Vital
普阿松　S. D. Poisson
奥斯古德　W. F. Osgood
棣莫弗　A. de Moivre
雅可比　C. G. J. Jacobi

詹森　J.L. Jensen
蒙泰尔　P. Montel
黎曼　G. F. B. Riemann
儒歇　E. Rouché